NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

PROCEEDINGS

VOLUME XLV

No. 9

President: J. VAN DER HOEVE
Secretary: M. W. WOERDEMAN

CONTENTS

KLUYVER, A. J., G. J. M. VAN DER KERK and A. VAN DER BURG: "The effect of radiation on light emission by luminous bacteria." I, p. 886.
BAAS BECKING, L. G. M.: "Dissipatie en Entropie", p. 895.
GORTER, E. and J. J. HERMANS: "The determination of protein in liquor by means of the spreading method", p. 902.
GORTER, E., J. J. HERMANS et ONG SIAN GWAN: "Sur les couches monomoléculaires des protéines et des lipoïdes de poumon normal ou intoxiqué par le phosgène", p. 907.
LOONSTRA, F.: "Pseudokonvergente Folgen in nichtarchimedisch bewerteten Körpern." (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 913.
HAANTJES, J.: "Conformal differential geometry. IV. Surfaces in three-dimensional space." „Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 918.
MEULENBELD, B.: "Des approximations diophantiques d'un système de formes linéaires complexes." (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 924.
RUTGERS, J. G.: "Extension d'une série des fonctions de BESSEL, due à LOMMEL, et de quelques séries des fonctions de BESSEL analogues." I. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 929.
FUNKE, G. L.: "The growth of waterplants in solutions of phytohormones and of other substances." (From the Botanical Institute, Government University, Leyden.) (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 937.
SCHUFFELEN, A. C. and R. LOOSJES: "The Influence of the Ion Activity and the Ion Concentration in the Medium on the Absorption of Cations by Plants." (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW), p. 944.
GAARENSTROOM, J. H.: "L'influence des substances oestrogènes sur l'ovaire de rates non-adultes, hypophysectomisées." (Laboratoire de Pharmacologie de l'Université de Leiden. Directeur: Prof. Dr. S. E. DE JONGH.) (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE), p. 953.

Biophysics. — *The effect of radiation on light emission by luminous bacteria.* I. By A. J. KLUYVER, G. J. M. VAN DER KERK and A. VAN DER BURG.

(Communicated at the meeting of September 26, 1942.)

1. *Introduction.*

In the course of their study of the action of carbon monoxide on respiration and light emission by *Photobacterium phosphoreum* VAN SCHOUWENBURG and VAN DER BURG [1]) made the unpublished observation that luminescence was markedly reduced by irradiation of the bacteria with blue light, an effect which proved to be reversible within a relatively short period of time. These observations were quite unexpected, since HARVEY [2]) had already long ago attempted to establish the same effect, but had been unable to do so. This negative result was somewhat surprising, because shortly before HARVEY [3]) had succeeded in proving that the luminescence of the ostracod crustacean *Cypridina hilgendorfii* was unmistakably — and at least partially in a reversible way — inhibited by illumination from a carbon arc of 15.000 foot candles, after removal of all deleterious ultraviolet rays.

It is difficult to decide why the result obtained by VAN SCHOUWENBURG and VAN DER BURG differs from that of HARVEY. It seems possible that a difference between the types of bacteria used in both investigations must be deemed responsible, although HARVEY reports to have been working with *Bacterium phosphorescens*, a specific name usually considered to be synonymous with *Photobacterium phosphoreum* Beijerinck. It is also not excluded that the intensity of the light applied in HARVEY's experiments has been inferior to that used in the Utrecht investigation, but HARVEY's statement that the illumination in the region of the bacteria surpassed that of sunlight at noon in summer does neither add to the probability of this suggestion.

Anyhow, in VAN SCHOUWENBURG and VAN DER BURG's experiments the irradiation effect showed quite clearly, in so far as use was made of light originating from the blue region of the spectrum. On the other hand no effect whatever was observed, when the same experiment was made using yellow light at about the same intensity.

Obviously blue light effects a photochemical conversion of some compound intimately connected with the light emission process as normally occurring in the luminous bacteria, whilst yellow light fails to do so. Leaving apart for the moment the possibility that some photosensitizer would take part in the radiation effect, these observations seemed to open the possibility to determine in an indirect way the absorption spectrum of one of the components of the light emitting system in luminous bacteria. Hereto it would be only necessary to repeat the irradiation experiments with monochromatic light of different wave-lengths, and to determine the amount of inhibition of the bacterial luminescence taking into account the quantum intensity of the light applied in the various cases.

Now it has to be remembered that the outlook for a successful isolation of one or more of the components of the light emitting system from luminous bacteria is still far from bright. Such an isolation could only be attempted with a reasonable amount of success, if one should succeed in separating the light emission process from the intact bacterial cell. It is well known, however, that until now luminous bacteria have withstood all efforts made in this direction[1]). For this reason the indirect determination of the absorption spectrum of one of the compounds involved in the light emission by luminous bacteria seemed to be of real importance. One might surmise that the establishment of such a spectrum would yield valuable indications as to the chemical nature of the compound in question. In this respect the successful outcome of WARBURG's well-known attempt to identify the nature of his "Atmungsferment", whilst applying the same principle, was most encouraging.

---

[1]) K. L. VAN SCHOUWENBURG and A. VAN DER BURG, Enzymologia 9, 34 (1940).

[2]) E. N. HARVEY, Journ. Gen. Physiol. 7, 687 (1925).

[3]) E. N. HARVEY, Journ. Gen. Physiol. 7, 679 (1925).

In the following paragraphs we shall give a preliminary report of the results obtained in an investigation carried out along the line indicated above[2]).

2. *Derivation of the absorption coefficient from the degree of luminescence inhibition.*

It is evident that a relatively high value of the absorption coefficient β_λ of the light absorbing compound for light of the wave-length λ will lead to a high degree of luminescence inhibition. Nevertheless, the interdependence between β_λ and the intensity of the light emitted by the bacteria before and immediately after the irradiation is not at once clear. In order to obtain an insight into this relation it is unavoidable to make some additional assumptions.

We shall, therefore, assume that the reduction of the said intensity from Y_0 to Y in consequence of the irradiation will be caused by the photochemical conversion of some compound M, the concentration of which will be reduced from m_0 to m, and that moreover the relation

$$\frac{Y_0}{Y} = \frac{m_0}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

will hold.

It is now necessary to inquire into the question how the reduction of m_0 to m will depend on the irradiation applied.

According to EINSTEIN's law of photochemical conversion we must conclude that the velocity of the conversion $\frac{dm}{dt}$ will be proportional to the number of light quanta absorbed per unit of time (A) or:

$$\frac{dm}{dt} = -\varphi A. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In this equation φ is a constant, usually designated as photochemical yield, since it represents the ratio between the number of molecules converted and the number of quanta absorbed.

Now it is clear that for A the following formula will hold:

$$A = \gamma I_q m \beta_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

in which γ is a constant and I_q the intensity of the irradiating light (expressed in quanta per cm^2 × sec.) at the spot of the absorbing system.

Hence we have:

$$\frac{dm}{dt} = -\varphi \gamma I_q m \beta_\lambda \text{ or } m = m_0 \times e^{-\varphi \gamma \beta_\lambda I_q t}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

---

[1]) We refer here only to the fairly recent publication by I. M. KORR, (Biol. Bull. 68, 347, 1935), and we can add that fresh attempts made by one of us (V. D. K.) according to new principles also have been quite in vain.

[2]) For full details the reader is referred to the doctorate thesis by G. J. M. VAN DER KERK (now in press).

This means that

$$ln \frac{m_0}{m} = \varphi \gamma I_q \beta_\lambda t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

With a view to equation (1) we may also write:

$$ln \frac{Y_0}{Y} = \varphi \gamma I_q \beta_\lambda t$$

or

$$\beta_\lambda = \frac{ln \frac{Y_0}{Y}}{I_q t} \times \frac{1}{\varphi \gamma}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

It ensues from this equation that in each irradiation experiment the expression $ln \frac{Y_0}{Y}$, *i.e.*, the natural logarithm of the quotient of the experimentally established intensities of the bacterial light before and after the irradiation — for which expression we introduce here the term photochemical effect (W) — is one of the factors determining the absorption coefficient. Divided by the product of I_q and the time of irradiation t we obtain the photochemical effect per quantum — the specific photochemical effect: W_λ — which is a direct measure for the absorption coefficient.

This means that the curve representing the interrelation between W_λ and λ — the so-called inactivation spectrum — is at the same time the absorption spectrum of the light absorbing compound M, expressed in a relative measure.

It should be kept in mind, that the I_q used in the foregoing formulae is the intensity of the irradiating light at the spot of the absorbing system and, therefore, certainly not equal to the experimentally determined intensity of the light as thrown on the bacterial cells. However, on ground of special observations we have good reason to accept that there is a close proportionality between both quantities in the whole range of wave-lengths applied in our experiments. This implies, of course, that by introducing the experimentally determined intensities in our calculations of W_λ the relative values remain unchanged and the same holds for the finally obtained inactivation spectrum, since this is also expressed only in a relative measure.

3. *Methods and apparatus employed.*

We shall refrain from giving here a description of the earlier part of our investigation in which aerated suspensions of *Ph. phosphoreum* were submitted to irradiation.

In the final experiments we have found it advantageous to make use of homogeneous plate cultures of the said species. A Philips water-cooled super-high tension mercury lamp S. P. 500 was used as a light source. Apart from the mercury lines this lamp emits a strong continuous radiation both in the visible and the near ultraviolet regions of the spectrum. The light of this lamp passed either a quartz or a glass spectrograph, and the spectrum thus obtained was projected on the plate culture of *Ph. phosphoreum*. It was found that under these conditions a radiation time of a few minutes sufficed to bring about a well visible inhibition effect in the irradiated zone of the otherwise uniformly luminous bacterial culture. Moreover, it could be observed that the intensity of the inhibition differed quite markedly in the various parts of the spectrum, partly depending on the differences in intensity of the various wave-lengths in the spectrum, partly owing to the different sensitivity of the bacteria towards light of various wave-lengths.

It now proved possible, to register this effect by directly photographing the culture in its own light, exposition times being restricted to 30—45 seconds.

Fig. 1 shows a reproduction of such photographs. Under *B* the uniformly luminous zone of a plate before the irradiation is represented, whilst under *A* the same zone immediately after the irradiation is reproduced. For *C* and *D* we must refer to Chapter 5.

It will not need elucidation that this result opened the possibility to apply the well-known photographic method described in the monograph "Objektive Spektralphotometrie" by ORNSTEIN, MOLL and BURGER[1]) for the determination of the intensity of the light emitted by the bacteria before and after the irradiation.

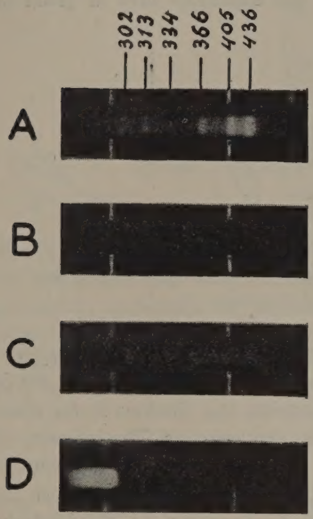


Fig. 1. Photographs of luminous bacteria in their own light.

A. Immediately after irradiation.
B. Before irradiation.
C. Two hours after irradiation.
D. Six hours after irradiation.

In this preliminary communication we shall confine ourselves to a few remarks regarding the experimental procedures finally adopted[2]).

a. The bacterial cultures. In order to avoid possible complications caused by scattering of the light in the medium carrying the bacterial layer, it proved essential to use a quite transparent gelatin medium, well clarified with egg albumen. Agar media were much less satisfactory in this respect, and for this reason *Ph. phosphoreum* being a gelatin non-liquefying species proved to be a much more favourable object than the gelatin liquefying species *Ph. Fischeri* and *Ph. splendidum.* In order to obtain uniformly luminescent cultures, which could easily be brought before the spectrograph we proceeded as follows. In a Petri dish which was kept horizontally some melted agar solution (2 %), containing 3 % NaCl was poured. After solidification a microscope slide was put on the surface of the agar gel, and hereupon a layer of about 1 cm of a nutritive gelatin medium (1 % peptone Poulenc, 3 % NaCl, 12 % gelatin) was brought into the dish. When the gelatin had also solidified, its surface was evenly inoculated with a thick suspension of a young and vigorous culture of *Ph. phosphoreum,* previously freed from bacterial clumps by filtering through filter paper (Schleicher and Schüll Nr. 595). After incubation for 18 to 20 hours at a temperature of about 16° C. such plates showed an optimal and uniform luminescence which remained constant for at least several hours. Now the slide with the adhering gelatin layer was cut out of the plate, and after modelling the gelatin block, the slide together with the luminescent block were transferred to the apparatus used for the photographing, and afterwards to the special device employed in the irradiation experiment. Apart from the facilitation in the handling of the culture the procedure described guaranteed an uniform thickness of the gelatin layer which is essential, because the full length of the spectrum had to be projected quite sharply on the bacterial layer.

---

[1]) L. S. ORNSTEIN, J. W. MOLL und H. C. BURGER, Objektive Spektralphotometrie. Sammlung Vieweg. Berlin (1932).

[2]) For full details the reader is again referred to the doctorate thesis by G. J. M. VAN DER KERK, to be published shortly.

b. The irradiation of the bacterial cultures. Since the preliminary experiments had learnt that the inactivation spectrum was partly situated in the ultraviolet, partly in the visible range of the lamp spectrum, it was necessary to use both a FUESS quartz and a ditto glass spectrograph. A schematic representation of the apparatus used is given in Fig. 2.

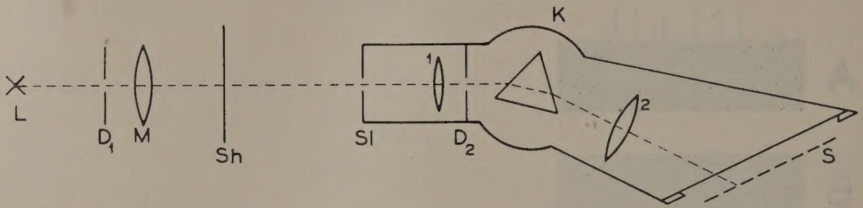


Fig. 2. Schematic representation of the apparatus used for the irradiation of the bacterial cultures (for explanation cf. the text).

In this figure *L* is the light source — the high tension mercury lamp already referred to —, *D* is a diaphragm, and *M* a quartz lens which gives an image of *L* on the slit *Sl* (width 0.3 mm) of the quartz spectrograph *K*. A sharp spectrum was obtained in the plane indicated with *S*, at a short distance of the backside of the spectrograph. The intensity of the spectrum as a whole could be regulated with the iris diaphragm D_2; the time of irradiation could sharply be regulated with the aid of the shutter *Sh* placed before the spectrograph. For the accurate and quick adjustment of the spectrum on the bacterial layer a special apparatus was built which will not be here described in detail. It may suffice to state that the slide with the luminescent gelatin block could be inserted into a frame which by means of a micrometer screw could be moved in such a way that the luminescent front of the block could at once brought in the correct position. This position had been determined beforehand making use of a specially constructed device for the detection of the plane in which the spectrum was sharp. Owing to this procedure an irradiation of the bacteria preceding the experiment was prevented.

c, The photographic determination of the intensity of the bacterial light and the computation of the photochemical effect. With a lens an image (1 : 1) of the luminescent culture was thrown on a photographic plate (Ilford Special Rapid, extra sensitive), which plate then was developed under standardized conditions. In each series of experiments the correct time of exposure was first established. This time appeared to vary between 30 and 45 seconds.

The intensities of the light emitted by the bacteria at corresponding spots before and after the irradiation were determined in the usual way, *i.e.* by photometric registration of the degree of blackening — or density — of the photographic plate by means of a galvanometer, subsequent measurement of the photograms, and by the conversion of the procentual transmissions in relative intensities with the aid of specially determined "density curves". For a detailed description of this procedure we may refer to the monograph by ORNSTEIN et al., cited above.

The curves in the micro-photograms always had a somewhat serrate character, partly caused by the grains in the photographic plate, partly by slight variations in the luminescence of the bacterial culture. These systematic irregularities in the measurements could be practically eliminated by taking care that the photometric determination of the density before and after the irradiation related to exactly the same spots of the cultures. In order to remove also as far as possible more incidental irregularities always three photometric determinations were made at different heights: one 0.3 mm below, one 0.3 mm above, and one exactly in the middle of the spectrum. From the values thus obtained an average was calculated.

In Fig. 3 the three lines indicated with b_1, b_2 and b_3 mark the spots where photometric determinations were made; h being the height of the irradiated zone. Finally both on the plates obtained before and after the illumination always a fourth determination was made at the spot indicated with *a*, *i.e.* outside the irradiated zone. Small deviations in the values of *a* for both plates must be due to changes in the luminescence caused by other factors than the irradiation (*e.g.* small changes in temperature, in moistness of the bacteria etc.). A procentual correction of all values obtained after the irradiation was applied on the basis of the deviations thus established.

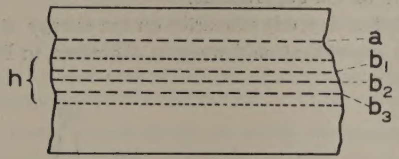


Fig. 3. Scheme indicating the spots where photometric registration was made (for explanation cf. the text).

From the intensity before irradiation (Y_0) and the corrected intensity after irradiation (Y) the photochemical effect could easily be computed with the aid of the formula

$$W = ln \frac{Y_0}{Y}.$$

d. The determination of the energy distribution in the spectrum used for the irradiation and the computation of the specific photochemical effect. The intensity of the light throughout the spectrum used for the irradiation was sufficiently high to permit a direct measurement of the intensities at the various spots with the aid of a vacuum-thermo-element after MOLL together with a sensitive galvanometer in series. The thermo-element consisted of a manganine-constantan strip 1 μ thick, 0.1 mm broad and 7 mm long, and was covered with carbon-black. The window in the vacuum tube was made of quartz with a view to the measurement of the ultraviolet part of the spectrum. A diaphragm on the quartz window had a height inferior to that of the spectrum, since the latter declines to the side of the short wave-lengths, and not the total energy of the spectrum, but the "energy density" had to be determined. The spectrum was sharply projected on the strip and the thermo-element could be moved with the aid of a micrometer screw in such a way that the strip passed horizontally through the spectrum. By this procedure the spectral energy distribution could be accurately determined and by taking into account the dispersion curve, we were able to read the wave-length corresponding with each position of the micrometer screw. The galvanometer readings were converted into absolute intensities in the spectrum expressed in erg per cm^2 × sec. by comparing these readings with those of a combination of a large surface thermopile after MOLL and a galvanometer, standardized in absolute measures, under conditions of equality of incident light.

From the values for I thus obtained the intensity I_q in quanta per cm^2 × sec. was calculated with the aid of the formula:

$$I_q = \frac{\lambda}{hc} \times I$$

in which λ = wave-length in cm
c = the velocity of the light (3×10^{10} cm per sec.)
h = PLANCK's constant (6.55×10^{-27} erg × sec.).

From the photochemical effect W, obtained in the way described under c, the specific photochemical effect W_λ could now easily be computed by dividing W by the product of I_q and the time of irradiation t in sec.

4. *Experimental results.*

We must refrain here from giving a full survey of all experimental results obtained in several extensive series of experiments. By way of example we reproduce in Fig. 4 a complete curve representing the relation between the photochemical effect W and wavelength, as obtained in one of the experiments.

It is clear that this relation depends primarily on the energy distribution in the spectrum applied in the irradiation experiment, and we give, therefore, in Fig. 5 a curve representing

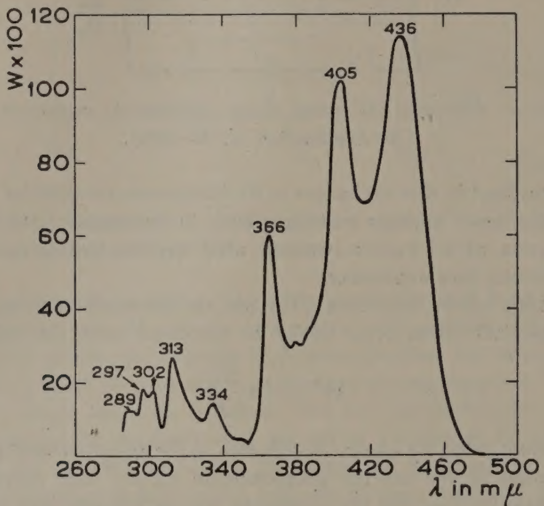


Fig. 4. The interrelation between photochemical effect (W) and wave-length.

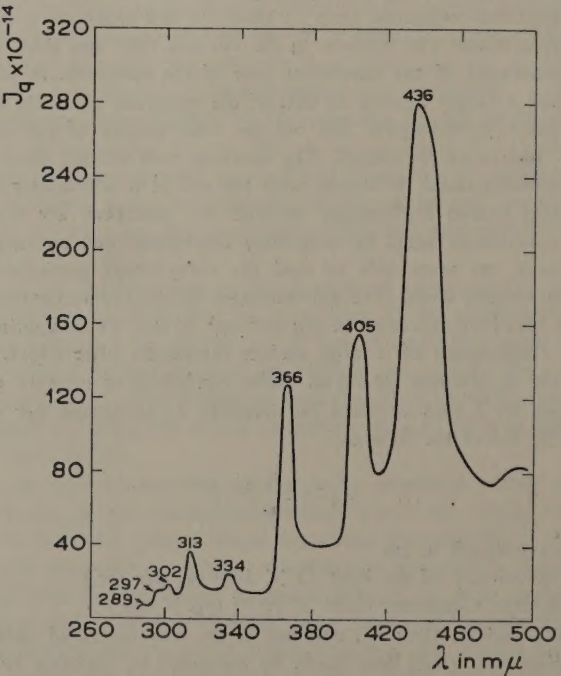


Fig. 5. The interrelation between the wave-length and the intensity of incident light used in the irradiation experiment.

this distribution. In this curve the intensity of the various wave-lengths is again expressed in quanta per cm^2 × sec.

A comparison of the curves in both figures shows that at first sight they have a certain amount of resemblance, in so far as wave-lengths which represent places of high intensity in the spectrum also have a marked photochemical effect. A closer inspection shows, however, that there is no proportionality whatever, the discrepancies, of course, being caused by the differences in specific photochemical effect of the various wave-lengths.

The final determination of the photochemical inactivation spectrum was based on the following series of experiments:

a. A series with the quartz spectrograph, in which the intensity of the irradiated light was varied, but the time of irradiation was kept constant (2 min.).

TABLE I.

Summary of the experimental data concerning the specific photochemical effect, on the average of which the final inactivation spectrum was based.

Wave-length in mμ	Specific photochemical effect: $W_\lambda \times 10^{18}$ (separate determinations)	$W_\lambda \times 10^{18}$ (Average)	Mean error ε
490	—0.03 , 0 , 0 , 0.04 , 0 —0 , 0 , 0 , 0	0	—
478	—0 , 0 , 0 , 0	0	—
468	—0.17 , 0.03 , 0.02 , 0.18 — 0.04 , 0.07	0.04	±0.01^{3}
460	—0.18 , 0.18^{5}, 0.21 — 0.19 , 0.21 — 0.05	0.17	±0.02^{3}
451	—0.45 , 0.50 , 0.35 — 0.28 , 0.29	0.37	±0.05
445	—0.48^{5}, 0.44^{5}	0.46^{5}	(±0.02^{5})
436	—0.58 , 0.60 — 0.51 , 0.71 , 0.61 — 0.75	0.63	±0.04
427	—0.56^{5}, 0.59 , 0.61 — 0.79 , 0.75^{5}	0.66	±0.05^{5}
424	—0.61 , 0.58 , 0.64 — 0.82^{5}, 0.75^{5}	0.68	±0.05^{4}
422	—0.64^{5}, 0.67^{5}, 0.70 — 0.81^{5}, 0.71	0.71	±0.02^{7}
418^{5}	—0.71 , 0.76^{5}, 0.74 — 0.78 , 0.61 , 0.85 — 0.81 , 0.74	0.75	±0.02^{4}
415	—0.77 , 0.79 , 0.76 — 0.85^{5}, 0.77^{5}	0.79	±0.01^{6}
413	—0.78 . 0.82 , 0.76 — 0.84^{5}, 0.78 , 0.88^{5}— 0.91	0.82^{5}	±0.02^{4}
405	—0.80 , 0.86 — 0.75^{5}, 0.68 , 0.91 , 0.91 — 0.96 , 0.88^{5}	0.84^{5}	±0.03^{5}
390	—0.75 , 0.81 , 0.69 — 0.81 , 0.95 , 0.88 — 0.49^{5}, 0.51	0.74	±0.06^{0}
386	—0.70 , 0.70 , 0.69 — 0.74 , 0.80 , 0.85 — 0.48^{5}, 0.46 , 0.50	0.66	±0.05^{2}
379^{5}	—0.64 , 0.54 , 0.58^{5} — 0.67^{5}, 0.71 , 0.76^{5}— 0.44 , 0.42^{5}, 0.46	0.58	±0.04^{6}
376	—0.52 , 0.50 , 0.61 — 0.54 , 0.63 , 0.62 — 0.41^{5}, 0.40^{5}, 0.43	0.52	±0.03^{2}
366	—0.40 , 0.45 , 0.48 — 0.44 , 0.51 — 0.33	0.43^{5}	±0.02^{5}
355	—0.37 — 0.45 , 0.33 — 0.31 , 0.32	0.35^{5}	±0.02^{7}
350	—0.28 — 0.44^{5}, 0.35 — 0.27 , 0.32	0.33	±0.03^{4}
345	—0.34 — 0.43 , 0.41 — 0.27 , 0.30	0.35	±0.03^{5}
334	—0.44 , 0.49 , 0.45 — 0.48^{5}, 0.42 , 0.55 — 0.34 , 0.35 , 0.36	0.43	±0.02^{5}
328	—0.50 , 0.52 — 0.60 , 0.47^{5}, 0.57 — 0.43 , 0.43 , 0.44	0.49^{5}	±0.02^{4}
313	—0.60 , 0 61^{5}, 0.52 — 0.52 , 0.60 — 0.45^{5}, 0.53 , 0.49 ,	0.54	±0.02^{2}
306^{5}	—0.70 — 0.60 , 0.49 , 0.76 — 0.51 , 0.53 , 0.51	0.58^{5}	±0.04^{4}
302	—0.74 , 0.77 — 0.65 , 0.87 — 0.69^{5}, 0.69^{5}	0.74	±0.03^{2}
297	—0.90 , 0.92 — 0.84 , 1.19 — 0.92 , 1.01 , 1.22	1.00	±0.06^{1}
292	—1.55 , 1.60 — 1.05 , 1.00 , 1.38 — 1.44 , 1.44	1.35	±0.09^{5}
289	—1.51 , 1.29 — 1.15 , 1.23 , 1.50 — 1.59 , 1.59	1.41	±0.08^{1}
280	—1.20 — 0.82 , 0.66 — 1.03 . 1.27 , 1.63	1.10	±0.14^{8}
275	—0.98 — 0.72^{5}, 0.58 — 1.02 , 1.21^{5}, 1.25	0.96	±0.11^{5}
270	—0.75 — 1.08 , 1.12^{5}	0.98	(±0.14^{0})

Remark: The values of the specific photochemical effect obtained in different series of experiments are separated by —.

b. Two series with the quartz spectrograph, in which with constant intensity the time of irradiation was varied.

c. Two series with the glass spectrograph, in which the intensity of the irradiated light was varied, but the time of irradiation was kept constant (2 min.).

For the experimental results obtained we must chiefly refer to the doctorate thesis of G. J. M. VAN DER KERK.

It may suffice here to state that both in the experiments with intensity variation and in those with time variation for the various wave-lengths investigated proportionality between the photochemical effect W and either of these factors, or in other words an approximately constant value for the specific photochemical effect W_λ, was obtained, at least in so far as the value of W ($\times$ 100) did not much surpass 50. It is clear that this result justifies the assumptions on which the computation of W and W_λ is based.

It is true that the values obtained show a certain amount of spreading caused by the inevitable imperfections of the method (incomplete homogenity of the bacterial cultures etc.). Nevertheless, the fact that for the more essential wave-lengths a relatively large number of determinations was made, enabled us to calculate for these wave-lengths an average value, the probable error of which apparently remains within reasonable limits.

In Table I we have collected all values for the specific photochemical effect on which the final determination of the inactivation spectrum was based. Finally in Fig. 6 the inactivation spectrum itself is given.

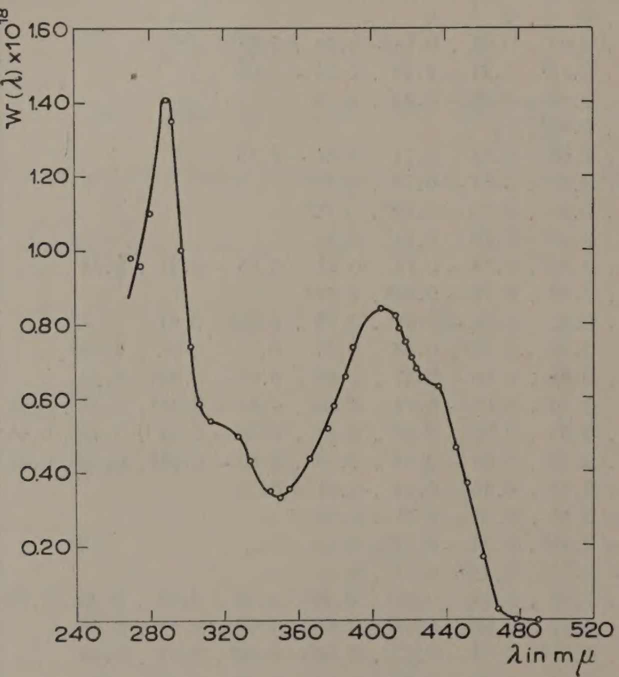


Fig. 6. The inactivation spectrum of *Photobacterium phosphoreum.*

We wish here to recall that in Chapter 2 it was argued that this inactivation spectrum at the same time represents the absorption spectrum — in a relative measure — of the compound absorbing the radiation which inhibits the light emission by the bacteria. As will be seen the curve obtained is quite fluent and especally the linking-up between the parts determined with the quartz and the glass spectrograph is quite smooth. The spectrum shows two distinct bands at 290 m μ and 405 to 410 m μ respectively, and moreover there are indications for two secondary maxima at about 320 and 430 m μ.

Botany. — *Dissipatie en Entropie.* By L. G. M. BAAS BECKING.

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

Dingen worden vervaardigd, benut, beschadigd. Uiteindelijk worden zij weggeworpen — hun vorm vergaat — zij worden door microbiologische processen omgezet, zij worden door water opgelost, zij oxydeeren en roesten. Uit een samengebrachte hoeveelheid materie wordt een diffuus verspreide massa.

Levende dingen bouwen zichzelven uit hun omgeving op, concentreeren als het ware die omgeving in zichzelve, zij vormen, als het ware, stoffelijke foci. Bij hun leven vergaren zij voedsel, dat zij benutten gedeeltelijk en verder gedeeltelijk, als secreet of excreet, weer aan de omgeving afstaan, waar het verder verspreid en omgezet wordt. Dan, bij den dood van het organisme, gaat deze merkwaardige samenbinding van stoffen over tot ontbinding. Uit deze verspreiding, uit deze ontbinding, deze ruïnen, bloeit nieuw leven.

Is het het leven alleen, dat zich zoo krachtdadig verzet tegen de verspreiding, het homogeen worden, der aardsche massa? Wij zelven doen zeker mee aan het concentreeren, het bijeenbrengen van stoffen, maar aan den anderen kant zijn wij zeer groote verkwisters. En zoo het leven en wijzelven, als exploitanten meer dan als rentmeesters dezer aarde hierin betrokken zijn — hoe staat het met de aarde zelve — hoe staat het met de hemellichamen?

Door het heelal zelve vinden wij concentraties van massa, doch de uiteenstreving dier massa's in een uitdijend heelal gelijkt eerder op een zaaien dan op een oogst.

Het beginsel, het begrip, dat ten grondslag ligt aan de concentratie, het vergaren, het bijeenbrengen van gelijksoortige stof eenerzijds en het ontbinden, het verstrooien, het vergaan en het verspreiden der materie anderzijds, kan worden aangeduid met den term *dissipatie*.

Concentratie, als tegendeel der dissipatie, is wellicht een weinig gelukkige aanduiding, omdat concentratie een zeer goed gedefinieerde grootheid is, massa per eenheid van volume of per eenheid van oppervlak, met dimensies resp. (ml^{-3}) en (ml^{-2}). Hieruit zou volgen, dat dissipatie zou zijn een functie van het volume of van het oppervlak per eenheid van massa $f(m^{-1}l^{3})$ of $f(m^{-1}l^{2})$. En men moet zich niet binden aan een al te scherpe definitie van dezen term, gezien de mogelijkheid, dat door deze definitie een aantal verschijnselen, die volgens onze intuïtie onder één begrip moesten worden vergaard, buitengesloten konden worden.

Concentratie zal daarom, met restrictie, als negatieve dissipatie worden opgevat. De dissipatie is hier evenredig aan een logarithme. Ze is $-A \log C$, waarin C concentratie.

Bovendien zijn deze aanduidingen afkomstig van een bioloog en niet van een physicus. De physicus is een man van wetten, een bioloog helaas meestal een anecdoticus.

Anecdotisch wil ik daarom het begrip der dissipatie benaderen, met voegzame aarzeling — en met nog grooter aarzeling aan het einde van dit verhaal wijzen op wat mij scheen hierin niet triviaal te zijn — een mogelijk physisch analogon.

Een gloeiende, afkoelende aarde, waarin oorspronkelijk de materie wellicht meer homogeen was, zal onder den invloed van het zwaartekrachtveld gelaagdheid gaan vertoonen. Dit is uitvoerig betoogd door GOLDSCHMIDT, die echter vooral de kristallisatiekrachten in beschouwing nam. Zonder echter zijn argumenten in de details te kunnen of te willen volgen blijft toch een gelaagdheid naar soortelijke massa, een stratificatie in een nikkelijzeren kern, met wellicht het sima en het sial, en een hydrosfeer en een atmosfeer. Het zwaarteveld zelve heeft hier de dissipatie doen verminderen.

Het stralingsveld van de zon bewerkt eveneens veranderingen in de dissipatie. Noemen wij slechts het water, dat overgaat van vloeibaren in gasvormigen toestand met vermeerdering, of condenseert met vermindering der dissipatie.

Dit eeuwige veranderen, dit spel tusschen hydrosfeer en atmosfeer leert ons nog een ander ding. Ieder vormsel, zij het door menschenhanden of door het levensprincipe geconstrueerd, is stof en zal tot stof wederkeeren. In haar kortstondige verschijning is het een minder waarschijnlijke zaak. De stof, waartoe het wederkeert, de ontbinding, de verwording, de afslijting — zou dus de meer waarschijnlijke toestand zijn. Overgangen van minder naar meer waarschijnlijken toestand — dingen, die min of meer spontaan geschieden, verloopen over het algemeen onder vermindering van den inhoud aan vrije energie van het systeem. Dissipatie zou dus over het algemeen een exotherm proces kunnen zijn. Niets is echter minder waar. De energieverandering, die volgens NERNST optreedt wanneer men een oplossing verdunt van concentratie C_1 tot C_2 (waarin $C_1 > C_2$) is weliswaar evenredig met $\log \frac{C_1}{C_2}$ en hier zou onder toename der dissipatie werkelijk de inhoud van het systeem aan vrije energie verminderen, doch het dissipeeren van een grooten, bolvormigen druppel, het verstuiven van dezen druppel tot een fijnen nevel eischt, integendeel, een verhooging van de energiepotentiaal in den vorm van een verhoogde oppervlakte-energie, die immers evenredig is aan het totale, tijdens het dispergeeren zich vergrootende oppervlak.

Ook bij de dissipatie van water tot damp wordt veel energie uit de omgeving opgenomen (verdampingswarmte).

Bovengenoemde voorbeelden illustreeren genoegzaam het feit, dat in de stofwisselingsleer de vermeerdering der dissipatie i.h.a. niet aan de katabolische processen mag worden geketend. Er zullen toch zulke processen zijn, waarbij de dissipatie afneemt, omgekeerd kan men zich een anabolie denken, waarbij de dissipatie toeneemt.

Vermeerdering van de dissipatie verloopt dus geenszins parallel met vermeerdering der entropie, een feit, waarop later zal worden teruggekomen.

Voor den bioloog is natuurlijk van belang de mate, waarin levende structuren de verstrooiing der stof kunnen beïnvloeden, hoe zij met andere woorden de concentratie van bepaalde elementen kunnen verhoogen, van anderen weer verlagen.

Door de studiën en compilaties van GOLDSCHMIDT en van de NODDACK's zijn ten naaste bij bekend geworden de frequentie (of relatieve concentratie) der elementen in den cosmos, en in de lithosfeer der aarde.

Bijgaande figuur (Fig. 1, tabel) geeft de resultaten, waarbij de frequentie (verhoudingen der totale massa's der elementen) als logarithmen zijn gegeven, en waarbij de frequentie van de zuurstof steeds als 10 is aangenomen.

Het is nu mogelijk grafisch voor te stellen het verband tusschen de frequentie der elementen in b.v. de lithosfeer of in de hydrosfeer (abcis) en de frequentie der elementen in de levende structuren, waarbij een gemiddelde waarde tusschen plant, dier en bacterie wordt gegeven (ordinaat). (Figuur 2.)

Wanneer de frequentie in extern en in intern milieu hetzelfde is, zoo zullen de punten, die de elementen voorstellen, op de diagonaal liggen. De elementen in den bovendriehoek zijn t.o.v. het uitwendig milieu geconcentreerd, die in den benedendriehoek zijn gedissipeerd.

Gezien het feit, dat de organismen voor het grootste deel uit water bestaan, behoeft het geen verwondering te baren, dat de punten die waterstof en zuurstof voorstellen, op de diagonaal komen te liggen. Koolstof echter is zeer geconcentreerd. De kroon spant het Jodium, dat 10.000-voudig t.o.v. het uitwendig milieu in de levende cel geconcentreerd wordt. Vanuit zeewater worden vrijwel alle elementen in de levende cel geconcentreerd, het Na, Cl en Mg daarentegen, die onder de meest frequente elementen in het zeewater behooren, worden door het levende systeem echter veel minder aangenomen.

Ten opzichte van de koolstof neemt de plant, in hare beïnvloeding der dissipatie, een zeer bijzondere plaats in. Een éénjarige plant, die een nieuw territorium in beslag gaat nemen, is oorspronkelijk slechts vertegenwoordigd door één enkel zaadje — een kleine concentratie van stof.

Tijdens het kiemen, voordat de jonge plant nog koolstof kan assimileeren, zal de synthetische stofwisseling quantitatief teruggedrongen worden ten opzichte van de katabolie, dàn echter komt de tijd, dat de synthese in steeds meerdere mate gaat overheerschen. De plant ontwikkelt zich, bloeit en brengt zaden voort, die de wind naar nieuwe plaatsen brengt en het areaal vergroot. Nemen wij aan, dat de zaadjes nu een grootere oppervlakte concentratie dan het jaar tevoren vertegenwoordigen, dan kan de dissipatie ten naastebij door een periodieke tijdformatie worden voorgesteld.

Hierbij is in aanmerking genomen, dat de moederplant ieder jaar na rijpheid sterft en omgezet wordt door micro-organismen. De toename der totale hoeveelheid koolstof wordt dus door een geheel andere lijn voorgesteld.

	C	A	B	Z
H	13	9	9	9
Li	3	6	2?	?
B	5	6	3?	?
C	8	8	9	5
O	10	10	10	10
F	?	7	7	?
Na	9	9	7	8
Mg	9	9	6	7
Al	8	10	6	?
P	?	8	8	1
S	7	7	8	7
Si	7.	7	6	1
Cl	?	8	7	8
K	7	9	8	6
Ca	7	9	8	6
Ti	6	9	3?	–
V	6	7	4?	?
Mn	8	7	8	6
Fe	8	9	7	4
Co	6	6	3	?
Ni	7	7	2?	?
Cu	6	7	4	?
Zn	6	7	5	?
As	2	6	3?	?
Br	?	6	6	4
Rb	3	6	2?	?
Sr	4	7	2?	?
Mo	3	6	4	?
J	?	3	7	3

Logarithme der frequentie (O=10) voor een aantal elementen in den cosmos (C), in den aardkorst (A), in biologisch materiaal (B) en in zeewater (Z). Hoofdzakelijk naar Goldschmidt & Noddack. De getallen zijn afgerond.

Fig. 1.

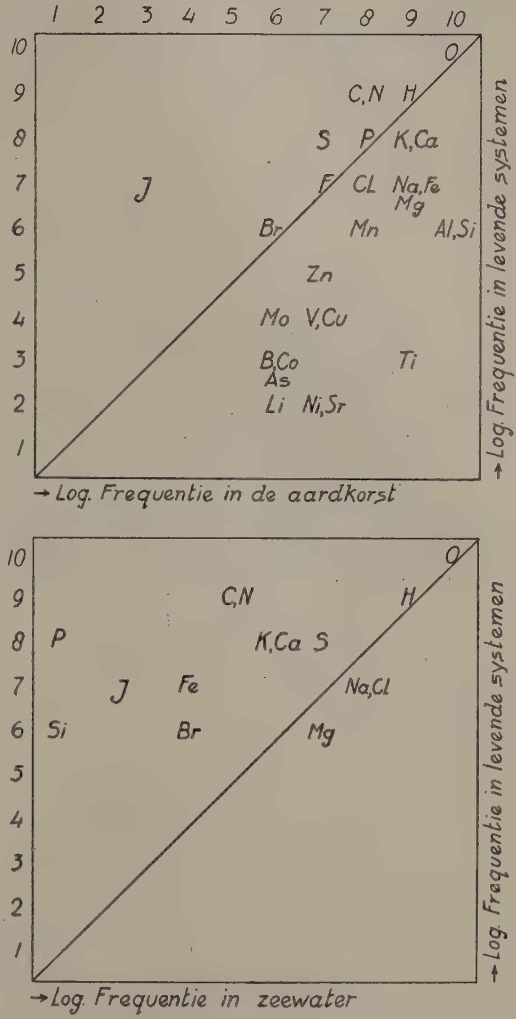


Fig. 2.

Bovenstaande beschouwingen hebben betrekking op de gebonden koolstof, men kan eigenlijk evengoed de dissipatie betrekken op een willekeurig orgaan. Zoo b.v. op een zaad. Interessant wordt het verloop in tijd van de dissipatielijn, wanneer de mensch het plantenproduct benut, zooals b.v. de tarwe.

Hierbij nemen wij aan, dat de hoeveelheid zaaigraan ieder jaar constant blijft. (Figuur 3.)

Wijzelven kunnen in den cyclus van het graan als verzamelaars en als verkwisters optreden. Gesuperponeerd op het natuurgebeuren staat ons ingrijpen, dat de concentratie per eenheid van oppervlak regelt, de samenbrenging van den oogst, het opslaan, de distributie en consumptie.

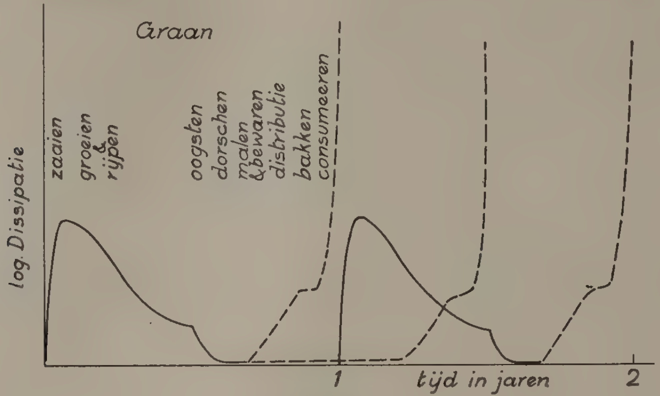


Fig. 3.

Beschouwen wij den tarweoogst met het stroo, dan wordt de zaak ingewikkelder. Toch blijft het eenvoudig de dissipatielijn aan te geven. In het algemeen kan gezegd worden, dat moderne land- en tuinbouw streven naar een minimum dissipatie, tenminste voorzoover het de productie betreft.

Een zuiver menschelijk bedrijf is de mijnbouw. Hier zal b.v. ijzererts bijeengebracht worden en geconcentreerd bij den hoogoven. Deze zal het ijzer er uit vervaardigen en dit ijzer distribueeren waaruit dan b.v. witblik wordt vervaardigd. Wanneer uiteindelijk het leege blikje door den reinigingsdienst wordt weggehaald en op de aschbelt terechtkomt, behoeft het slechts eenige jaren te duren, voordat al het ijzer volkomen geoxydeerd is en in den grond gespoeld en niet meer teruggewonnen kan worden (HUDIG). (Figuur 4.)

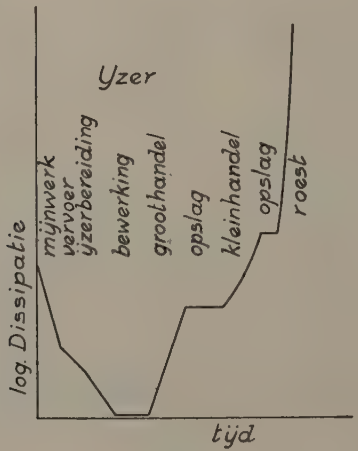


Fig. 4.

De gelijkenis met de kromme voor de tarwe is opvallend. Toch zal niemand zeggen, dat graan door consumptie verspild wordt, terwijl het ijzer na oxydatie voor ons niet meer toegankelijk is.

Dit brengt ons tot de vraag van de omkeerbaarheid der dissipatie. Een gouden ring, een nugget, vertegenwoordigt een laag niveau van dissipatie. Lossen wij den ring in koningswater op, dan zal het toch mogelijk zijn het goud hieruit terug te winnen. Schenken wij echter de goudoplossing uit in de zee, dan wordt dit wel zeer moeilijk. HABER heeft daartoe wel een methode gegeven, maar het zou enorm veel arbeid; menschelijken en physischen arbeid, vergen.

Levende dingen worden na den dood onomkeerbaar gedissipeerd. De dissipatie van anorganisch materiaal is in principe omkeerbaar, hoewel practisch deze omkeerbaarheid veelal in het geheel geen beteekenis heeft.

De zaden en de sporen waarborgen tenminste een rhythmische concentratie van organische stof, ofschoon methoden van het aan de markt brengen en het distribueeren, vooral in tijden van economische crises, enorme verspilling met zich kan brengen. Dit doet aan het regeneratievermogen, op een willekeurigen, door ons te bestemmen tijd, niet af. Wat wij echter aan de onbezielde aarde vernielen — een klein onderdeel van het groote verspillingsprobleem, is in zeer vele gevallen niet meer goed te maken. Wij zullen dan wel geen warmtedood sterven, maar wel, en in de niet al te verwijderde toekomst in onze dissipatieproducten, temidden van een rijkdom, in armoede sterven. In vele opzichten is de grootte der dissipatie ook en maat voor de omkeerbaarheid. Zoo kan scrap-metaal nog worden teruggevonden, diffuus verdeelde ijzerroest echter is te ver heen!

RILKE zegt: „Das Erz hat Heimweh".

ANTOINE LOURENT LAVOISIER (1743—1794) heeft, naar aanleiding van zijn proeven met de oxydatie van het kwik, de wet van de constantheid van de stof uitgesproken.

In het Traité de Chimique van 1786 staat zijn bekende dictum „rien ne se perd, rien ne se crée".

Een prachtige tegenhanger van deze, later door LANDOLT met verfijnde balansen getoetste wet, is de door intuïtie en overtuiging ontstane gedachte, die rijpte nu honderd jaren geleden, in het brein van een medicus, JULIUS ROBERT MAYER (1814—1878) tot den regel van de constantheid der energie. Weliswaar hebben de Deen COLDING en de Engelschman JOULE hem naar de kroon gestoken, HELMHOLTZ heeft in 1847 een voordracht gehouden: „Ueber die Erhaltung der Kraft", waarin hij den naam van MAYER zelfs niet noemde, toch blijft het MAYER, die de wet van het energiebehoud moeizaam en langs allerhand kronkelwegen heeft bereikt.

Hier dus ook „rien ne se perd, rien ne se crée".

De eerste hoofdwet van de warmteleer — de eerste hoofdwet van de materieleer, zij waren gegeven. Aan EINSTEIN de eer ze beiden in grooter verband te hebben opgenomen!

De eerste hoofdwet der warmteleer is biologisch getoetst door RUBNER voor gist, door ATWATER voor de menschelijke stofwisseling, door ALGERA voor de schimmel Aspergillus. Uit de zeer overtuigende energiebalansen bleek wel zeer duidelijk, dat er geen andere meetbare vormen van energie in de stofwisseling betrokken zijn dan degene, welke wij reeds kenden.

Een toetsing van de wet van LAVOISIER is, voorzoover mij bekend, met biologisch materiaal nimmer geschied.

RUDOLF CLAUSIUS (1822—1888) voerde in zijn „Mechanische Wärmetheorie" in 1865 het entropiebegrip in. Het is in de handen van LUDWIG BOLTZMANN (1844—1906) verder tot een zuiver omlijnde physische leer geworden.

Wanneer een proces verloopt in een besloten systeem, dat nòch cosmische, nòch microscopische afmetingen bezit, dan zal immer de entropie als tolgaarder optreden en de totale energie-inhoud van het systeem zal, hoewel na het proces dezelfde, toch niet in het algemeen dezelfde mate van bruikbaarheid blijven bezitten. Een gedeelte der energie dient om de temperatuur van het geheele systeem te verhoogen. Deze diffuse warmte, waaruit geen mechanische arbeid kan worden verkregen, kan hoogstens, wanneer het proces volledig omkeerbaar is, nul bedragen. Processen, waarbij de diffuse warmte negatief wordt, waarbij dus warmte aan de omgeving wordt onttrokken teneinde arbeid te verrichten, bestaan niet (perpetuum mobile van de tweede soort). Volledig omkeerbare reacties kennen wij niet, dus in het algemeen zal de diffuse warmte, de entropie, steeds toenemen.

BOLTZMANN formuleert het als volgt: „die Energie der Welt ist konstant, die Entropie aber strebt einem Maximum zu" — òf in de formuleering van MAX PLANCK:

„Jeder in der Natur stattfindende Prozess verläuft in dem Sinne, dass die Summe der Entropien aller an dem Prozess beteiligten Körper vergrössert wird."

Toch moeten deze uitspraken met restrictie worden aanvaard. BOLTZMANN heeft gewezen op het element der waarschijnlijkheid in het entropiebegrip. Een proces verloopt van een toestand van *mindere* naar een van *meerdere* waarschijnlijkheid. Hij heeft de mate van onomkeerbaarheid van een proces vergeleken met de mate van groote waarschijnlijkheid van den eindtoestand. Van hem stamt de formuleering van de entropie $S = f(W)$, waarin $f(W) = k \log W \left(K, \text{ voor ideaal gas} \doteq \frac{R}{N}\right)$.

Nu BOLTZMANN eenmaal de brug had geslagen tusschen entropie en waarschijnlijkheid, was de weg vrij. De populatie, die nu eenmaal een statistiek moet maken, heeft de verplichting talrijk te zijn wanneer zij tenminste goede statistiek willen maken. Dit geeft een restrictie wanneer er weinige moleculen in hun warmtebeweging worden beschouwd. In deze beweging kunnen zeker toestanden van mindere waarschijnlijkheid optreden. Verder wees CLARK MAXWELL erop, dat een selectief agens, met rede begaafd, door het scheiden van langzame en snelle moleculen in een homogeen gasmengsel toch een temperatuurgradiënt — en zoo mechanischen arbeid kan verkrijgen uit een systeem, dat eerst in temperatuurevenwicht was. Hier is dus de entropie verlaagd.

Dit wezen, in de literatuur bekend als „MAXWELL's demon" heeft Sir WILLIAM THOMSON (de latere Lord KELVIN) geïnspireerd tot zijn uitspraak, dat het onmogelijk was de entropie te verlagen „by means of inanimate agencies". HELMHOLTZ ging verder. Hij schreef aan levende wezens het vermogen toe de tweede hoofdwet der warmteleer te verslaan.

In het nuttig effect van een bepaald proces, b.v. de verbranding van kool onder een stoomketel, ligt reeds een mogelijkheid om de eventueele entropieverlaging aan te toonen. Indien namelijk warmte aan de omgeving zou worden onttrokken tot het verrichten van arbeid, dan zou het nuttig effect van het proces grooter dan 100 % kunnen zijn. In werkelijkheid blijft het nuttig effect van de stofwisselingsprocessen ver, en meestal zeer ver onder de 100 %. Het blijkt dus, dat levende wezens zich niet als MAXWELL's demonen gedragen en dat zij ook hier niets doen wat in strijd is met de bestaande natuurwetten.

Ondanks het overtuigend karakter van de resultaten dezer metingen blijven vele biologen (o.a. VERNADSKY) volharden in hun geloof aan het vermogen van de levende structuur om de entropie te kunnen verlagen. HANS DRIESCH meent, dat ons intellect datgene vermag, waartoe het leven zelve onmachtig is. En hij zegt over MAXWELL „es gibt seine Dämonen, wir selbst sind sie". Maar nog nimmer heeft iemand den vinger kunnen leggen op een afwijking van de 2e Hoofdwet.

Men zou kunnen spreken van een *vormentropie*, en daarmede bedoelen den meest waarschijnlijken vorm, dien een vervormbaar lichaam, of verzameling van lichamen, innemen. Een aantal kleine droppels zal versmelten tot één grooten — hierbij zal de entropie toenemen. Een zeepschuim, dat verandert in den tijd, een metastabiel kristalrooster bezitten een entropie, die vergroot kan worden.

De vraag is nu of, evenals de wet van stof-behoud en energiebehoud elkanders tegenhangers zijn, ook de entropiewet een stoffelijke analogon bezit.

De dissipatie, zooals hierboven omschreven, bezit enkele karakteristieken, die aan de entropie herinneren. Er is echter een fundamenteele tegenstelling. En deze is gelegen in de omkeerbaarheid. Menschelijk intellect, zoowel als de levende toestand, vermogen dissipatie te verminderen, zijn in staat om concentraties van specifieke stoffen te bewerkstelligen, zelfs al is de dissipatie zoo opgevoerd, dat de taak welhaast hopeloos schijnt.

Bezit de entropie een waarlijk stoffelijk analogon — of zelfs iets, dat meer is dan analogon — een ander aspect, dat „stofentropie" zou kunnen heeten, evenals de wetten van LAVOISIER en MAYER slechts aspecten zijn van éénzelfden algemeenen regel?

Die vraag is aan de physici om te beantwoorden. Zeker weet ik, dat de biologen, wanneer zij, zooals DRIESCH, over entropieverlaging spraken, veeleer dissipatieverlaging — of iets dat daar nauw verband mede houdt — bedoelden.

Ik heb een vraag aangeroerd uit een gebied, dat ons allen interesseert. De wijze, waarop wij de aarde beheeren — haar bosschen, bergen, akkers en weiden — zij stemt tot nadenken en een nadenken, dat geen wijde vergezichten doch laaghangende en dreigende wolken oproept.

Want waar wij lang zijn geweest, daar komt de woestijn.

En is de woestijn niet veelal een vorm van vrijwel onomkeerbare dissipatie?

Medicine. — *The determination of protein in liquor by means of the spreading method.* By E. GORTER and J. J. HERMANS.

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

The protein content of liquor is determined by the spreading method. To that end quantities as large as 100 cmm must be brought on to the surface. It is shown in a series of experiments that this is of no consequence to the results obtained provided the spreading is performed with sufficient care, and the protein content of the liquor is not too low.

As regards the determination of globulin and albumin separately, the method can give no more than a rough estimate.

The application of the method shows that the protein content of liquor is a valuable information in clinical examination.

It has been shown by GORTER and BLOKKER[1]) that the protein content of human serum may be found from the spreading area on 0.1 n. HCl. To that end serum is diluted ten times, and 5 mm^3 of the dilute solution are spread on the tray.

In the present paper similar experiments with liquor will be discussed. Now, the protein content of normal liquor varies between 10 and 40 mg %, while that of serum is of the order of 7 %. Consequently if the spreading is performed on a tray of similar dimensions, it is obvious that quantities of the order of 100 mm^3 of undiluted liquor will have to be spread. Thus the question arises whether the spreading method is applicable to these large quantities of protein solution of low concentration. In the spreading technique employed the solution is slowly blown out on to the surface, and it is by no means to be relied upon without further investigation that spreading is complete if the protein concentration is low.

Experiments with ovalbumin. For this reason some preliminary experiments with ovalbumin were carried out. A solution of ovalbumin in water, containing about 40 mg protein per cc, was diluted 5, 10, 20 and 100 times respectively. Of these solutions 5, 10, 20 and 100 mm^3 were spread on HCl 0.1 n. The force-area curves proved to be identical within experimental error, i.e., within a few per cent.

A similar result was obtained on acetate-veronal buffers 0.0033 molar of $p_H = 3$ and $p_H = 5$. Yet this result is not to be considered as applicable to all proteins at any p_H. Further experiments with ovalbumin showed (a) that p_H should not be too high and (b) that salts must not be present in the protein solution to such an extent as to make the density of the solution considerably larger than that of the liquid in the tray. As regards (a): at large p_H values spreading becomes more and more incomplete if the protein concentration is decreased. As regards (b): a large concentration of salts impedes spreading from protein solution, probably because the solution when flowing from the pipette tends to disappear under the surface on account of its high density[2]). The subject was not studied by us in great detail, and the effects mentioned may weigh differently with different proteins. For the present, however, we are only interested in the behaviour at $p_H = 1$.

Experiments with serum and liquor. Since we are here concerned with the proteins of human liquor, the following experiments were carried out with serum, liquor, and mixtures of serum and liquor.

---

[1]) E. GORTER and P. C. BLOKKER, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 151 (1942).

[2]) Compare also: E. GORTER and J. J. HERMANS, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, No. 8 (1942).

Human serum was diluted 20, 40, 80, 160 and 320 times. The amount of liquid spread was 5, 10, 20, 40 and 100 mm^3 respectively. The protein content of the serum as calculated from these determinations was the same with all dilutions except the highest. In another series we even succeeded in spreading 100 m^3 of a 400-fold dilution without loss of protein. It is clear that this upper limit will to a certain extent depend on spreading practice and may also change slightly with the serum used. Similar results were obtained with ox-serum; a summary is given in table I.

TABLE I.

Human serum			Human serum			Ox serum		
Dilution	mm^3 spread	% Protein found	Dilution	mm^3 spread	% Protein found	Dilution	mm^3 spread	% Protein found
20	5	7.7	10	5	6.8	20	5	8.6
40	10	7.4	40	20	6.6	40	10	8.5
80	20	7.5	200	100	6.8	80	20	8.6
160	40	7.9	400	100	6.7	160	40	8.8
320	100	5.8	800	200	3.8	320	100	6.5

The protein concentration in serum diluted 200 times is about 40 mg %, which is just about the protein content of normal liquor. We may conclude that the total protein content of abnormal liquor ($>$ 40 mg %) can be safely determined by means of spreading. With normal liquor the spreading value may sometimes be too low unless spreading is performed with great care. Since, however, the protein content of normal liquor may vary between 10 and 40 mg %, from a clinical point of view even a hundred per cent error in this region would be of only minor importance.

Finally, it could be shown that the results obtained with serum also apply to liquor. To that end serum was diluted 200 times, and then mixed with different amounts of liquor. Of these mixtures 100 mm^3 were spread. It was found that the spreading area was additive within experimental error. Moreover, in two experiments the protein content of liquor was determined by a micro-Kjeldahl and was found to agree with the spreading value.

So far the determination of total protein. Our attempts to determine albumin and globulin separately were not successful. In serum the globulins are precipitated by half-saturated ammonium sulphate, centrifuged off and redissolved in NaCl 1 %. In this solution the globulin can be determined by the spreading method [1]), while moreover the direct spreading of the centrifugate yields information about the albumins [2]). It was found, however, that this procedure failed if applied to liquor. This is due to several factors. To begin with, the solubility of globulins depends on the protein concentration. If globulin is precipitated from dilute serum, the percentage found is too low. This factor diminishes the value of almost all other methods for the determination of globulin in liquor. Further, the salt content of the centrifugate, containing the albumins, is much too high to allow of direct spreading. In the case of serum, this centrifugate may be diluted 10 or 20 times, thus reducing the salt content to a value where it does no longer impede spreading. In the present case this is impracticable since the albumin content of liquor is too low.

Consequently, the figures mentioned for globulin in the tables below only give a rough estimate. Their significance is mainly derived from the fact that normal liquor contains practically no globulins at all.

Determination in liquor. Resuming we may say that total protein in liquor may be determined by the spreading method, while globulin can only be estimated roughly. If necessary, the liquor is centrifuged or filtered; then 100 mm^3 are slowly blown out of a pipette on to HCl 0.1 n. It is essential to use long pipettes of uniform cross-section, since it appeared impracticable to spread sufficiently slowly from 100 mm^3 pipettes with spherical widening such as they are commonly used in blood analysis. It is clear that smaller amounts must be spread in abnormal cases where the protein content is high.

In table II some results are recorded. By far the most are normal values (below 40 mg %). In all cases of meningitis the protein content is too high, varying between remarkably wide limits.

In the tables III, IV and V three particular cases have been studied in more detail: The parallellism between protein content and clinical estimation is obvious.

TABLE II.

Patient	Age (years)	mg % Protein	Number of cells	Diagnosis	Symptoms and further particulars on day of examination.
C	2	17.5		otitis media	convulsions
B	3	42		tuberculous meningitis	symptoms not very convincing
D	2	115	1700/3	tuberculous meningitis	glucose = 18 mg %; NaCl = 430 mg%
H	6	34		observation for encephalitis	slight tremor in hands
Z	3	9.1		convulsions	febris e sausa ignota; convulsions; NaCl = 619 mg %
P.V.	6	14.5		encephalitis?	NaCl = 680 mg%
K.V.	4	19	18/3	encephalitis?	ataxia, nystagmus
R.	1	29	22/3	meningismus, pneumonia	temperature normal, fluid on cultivating sterile.
P.	3	57 50	842/3 195/3	meningitis due to influenzabacilli	temperature almost normal, fluid sterile, 2 days later
D.M.	3/4	15		Jackson's epilepsy	preceded by encephalitis
C.M.	3	14		hydrocephalus communicans	
E.M.	1/6	3000		meningitis due to influenzabacilli	6 days before death
J.M.	2	18		acute enteritis	suspected of convulsions
D.K.	1/4	6.3	5/3	atrophia	debilitas mentis; high temperature
K.K.	8	50	301/3	acute cerebrospinal meningitis	Kernig slightly positive
		33	51/3		5 days later, Kernig negative

TABLE III. N. de H. no. 944 1941—'42.
Age 5 months; meningitis due to influenza bacilli, treatment sulfapyridin.

Date	mg⁰/₀ Protein	mg⁰/₀ Globulin	Number of cells	Particulars
17—3—42	132	18	7000/3	sulfapyridin from day of admission, 300 mg p. KG. during 1rst fortnight. Cerebrospinal fluid turbid; day of admission: 6th day of illness. All symptoms of acute meningitis, temp. 39.6°.
18—3—42	140	18	3764/3	temperature 39.0°
19—3—42	146		1728/3	sensorium free. Temp. 38.3°
23—3—42	123		968/3	condition unchanged. High fever since 3 days.
25—3—42	120			temp. 39.4° on the 24th and 39.6° on the 25th.
26—3—42	98		1788/3	
27—3—42	95		1400/3	temp. lower; condition not improved.
28—3—42	91	trace	1200/3	200 mg sulfapyridin per K.G. during 3 weeks.
30—3—42	113		2200/3	first day without fever, temp. remains normal since that date during a fortnight. Many bacteria.
31—3—42	106			
1—4—42	112	±10		
2—4—42			1648/3	
4—4—42	104			
7—4—42			1364/3	
8—4—42	162			
9—4—42	140		280/3	
10—4—42	207		624/3	Cheyne-Stokes respiration, opisthotomus.
11—4—42			5900/3	beginning of relapse
12—4—42			6000/3	
15—4—42	680	±85	14000/3	cerebro-spinal fluid very turbid
16—4—42	695	±200	23500/3	one day before death.

TABLE IV. v. d. G. no. 855 1941—'42.

Age 5 weeks; acute cerebrospinal meningitis, treatment with sulfapyridin.

Date	Liquid examined.	mg % Protein	mg % Globulin	Number of cells	Particulars
4—3—42	ventricular fluid	290	50	5200/3	fontanelle bulging. 6th day after admission, 7th day of illness. Symptoms of meningitis very slight on admission, gradually developing of characteristical symptoms of meningitis. Lumbar puncture gives turbid liquid containing many meningococci. Since day of admission temp. has been 39.2° during 4 days, from now on it remains almost completely normal. Treatment: sulfapyridin from 5th day after admission, 300 mg p. KG.
7—3—42	„	310		974/3	Liquor less turbid, sterile. Clinically little improvement.
10—3—42	„			2390/3	
14—3—42	„			1416/3	Treatment: sulfathiazol.
16—3—42	„	215	32	456/3	Distinct improvement, stiffness of neck diminished, tension of fontanelle considerably less.
19—3—42	„	176		182/3	Some stiffness of the neck.
23—3—42	spinal fluid	141	trace	232/3	Stiffness of the neck has disappeared
8—4—42	„	117			general condition satisfactory.

TABLE V. K. v. L. no. 1035 1942.

Age 6 years; meningitis due to pneumococci, treatment with sulfapyridin.

Date	mg % Protein	mg % Globulin	Number of cells	Particulars
28—3—42				treatment with sulfapyridin, 300 mg per KG. weight.
30—3—42	216		20200/3	marked symptoms of meningitis. 3rd day after admission, 8th day of illness. During the 3 first days of stay in hospital, temperature very high.
31—3—42	204	44	3120/3	improved. Temp. still high 39.5°. Pneumococci cultivated from blood and spinal fluid.
1—4—42	140	33	692/3	Culture sterile. Gradual fall of temp. Temperature remains normal during 17 days.
2—4—42			294/3	
4—4—42	82		188/3	stiffness of the neck slight. Kernig positive.
8—4—42	48		42/3	no stiffness of the neck. Kernig slightly positive.
12—4—42	35		30/3	general condition satisfactory.
15—4—42	44		13/3	
17—4—42	24		10/3	agranulocytosis, 3 days later cured.

Medicine. — *Sur les couches monomoléculaires des protéines et des lipoïdes de poumon normal ou intoxiqué par le phosgène.* Par E. GORTER, J. J. HERMANS et ONG SIAN GWAN.

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

1. Les protéines de poumon normal ou intoxiqué par le phosgène de porc ont des propriétés physiques et bioloqiques différentes. En effet, la solubilité, l'indice de réfraction, le pouvoir rotatoire et le spectre d'absorption dans l'ultra-violet des deux protéines montrent une différence nette [1]). Cette différence se révèle également dans le choc anaphylactique du cobaye [2]).

Il serait intéressant de savoir comment se comportent les couches monomoléculaires des protéines et des lipoïdes de poumon normal ou intoxiqué de porc [3]).

2. *Technique expérimentale.*

Selon la technique habituelle 10 mm^3 de solution de protéines pures sont soigneusement déposés tangentiellement à la surface de solution tampon. Celle-ci consiste pour le $pH < 3$ d'une solution d'acide chlorhydrique seule ou mélangée à une solution de chlorure de sodium et pour le $pH > 3$ d'un tampon véronal-acétate. La quantité de protéines dans la solution à examiner était déterminée par trois méthodes différentes : précipitation alcoolo-acétonique, pesée après évaporation d'une quantité déterminée, différence de pesées des protéines avant et après la dissolution.

Le poumon a été épuisé au Soxhlet à l'aide d'ether de pétrole ou d'acétone pendant 15 à 20 heures. La quantité de lipoïdes était déterminée par pesée après évaporation d'un volume connu. La solution tampon utilisée avait un $pH \sim 1$ ou $pH \sim 2$ (acide chlorhydrique 0,1 et 0.01 N). On employait 5 ou 10 mm^3 pour une mesure.

3. *Résultat obtenu avec les protéines.*

La surface S en mètre carré occupée par un milligramme de protéines est égale à

$$S = A \times l$$

A est une constante dépendant de la largeur de la surface étudiée et de la concentration des protéines et l la longueur en c.m. de la surface. Il y a avantage de porter à l'ordonnée non la valeur de S, mais le logarithme de S

$$\log S = \log A + \log l$$

En effet, si l'on commet une erreur dans la détermination de la concentration des protéines et par suite la valeur de A, la forme de la courbe reste la même, de sorte qu'on peut la comparer avec une autre courbe.

La figure 1 et le tableau 1 montre les courbes $S = f\ (pH)$, pH étant la concentration en ions hydrogène de la solution tampon, de deux poumons de porc différents. Dans le poumon 123 les protéines ont été isolées à partir d'un poumon frais normal ou d'un poumon frais intoxiqué par le phosgène. La courbe du poumon normal 123 a deux maxima, qui montrent que la solution examinée contient deux protéines différentes. Les maxima correspondent à des points isoélectriques des protéines. Si l'on compare cette courbe avec celle du poumon intoxiqué 123, on constate que la dernière courbe a une forme semblable, elle est cependant applatie et abaissée. Les maxima et le minimum sont déplacés vers le *p*H supérieur. Un autre poumon frais 125 examiné de cette manière a donné un résultat comparable.

---

[1]) ONG SIAN GWAN, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 872 et 1024 (1941)

[2]) ONG SIAN GWAN, ibid, **45**, 774 (1942).

[3]) Voir pour l'aperçu général des couches monomoléculaires de protéines: E. GORTER, Annual Review of Biochemistry, **10**, 619 (1941). E. GORTER, Surface tension and films *in* The Chemistry of the Animo Acids and Proteins by CARL L. A. SCHMIDT, U.S.A.

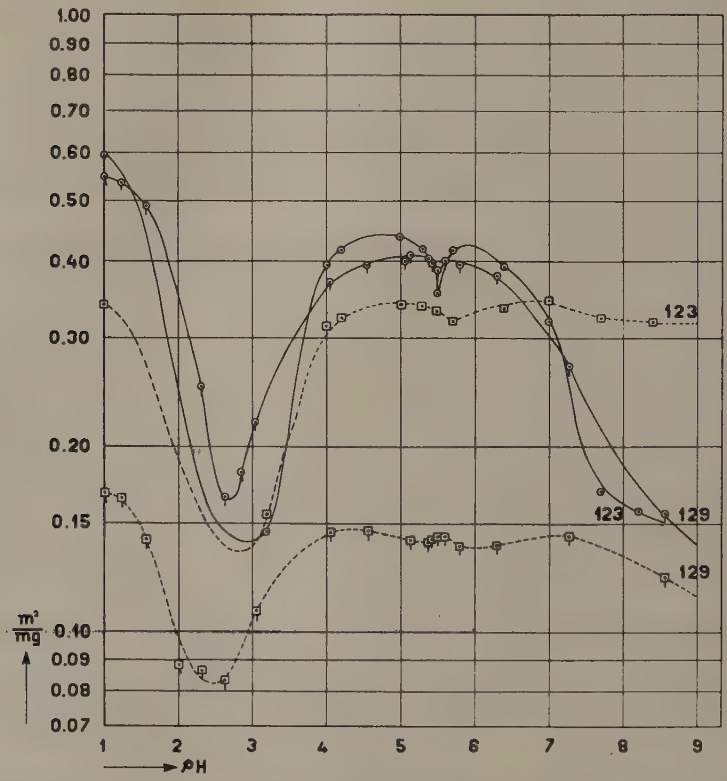


Fig. 1.

Relation entre la surface en m^2 par mg de protéines et le *p*H en coordonnées semi-logarithmiques.

—— ○ ⚲ poumon normal .

– – – □ ⊡ poumon intoxiqué par le phosgène

La différence des courbes de poumon normal ou intoxiqué est encore plus marquée dans le poumon sec 129. Dans ce cas les protéines ont été isolées soit à partir de poumon desséché normal soit à partir de poumon desséché et ensuite intoxiqué. La courbe est fortement abaissée, ce qui indique q'une partie de protéines ne s'étalent plus ou s'étalent moins complètement. Elle est dissoute ou bien elle est insoluble.. L'étude de la forme des courbes montre que les groupements NH^2 de la molécule protéique ne sont pas attaqués par le phosgène. Par contre l'écart de la courbe du poumon normal avec celle du poumon intoxiqué à partir de *p*H = 7 montre que les groupements COOH ne sont plus libres après l'action de phosgène [1]). Un autre poumon sec 130 examiné a donné un résultat semblable.

Ces résultats montrent qu'il existe une différence nette entre la courbe de poumon normal

---

[1]) Se rapporter à E. GORTER, H. VAN ORMONDT et T. M. MEYER, Biochem. J. **29**, 38 (1935).

TABLEAU 1.

Relation entre la surface en m^2 par mg de protéines et le *p*H.

*p*H	Poumon frais 123		*p*H	Poumon desséché 129	
	S_n	S_i		S_n	S_i
1.0	0.592	0.350	1.01	0.548	0.168
3.2	0.145	0.155	1.23	0.534	0.165
4.0	0.387	0.314	1.57	0.490	0.141
4.2	0.416	0.324	2.00	—	0.882
5.0	0.437	0.340	2.32	0.250	0.865
5.3	0.418	0.338	2.63	0.166	0.832
5.5	0.355	0.333	2.85	0.182	—
5.7	0.416	0.321	3.05	0.219	0.108
6.4	0.392	0.336	4.05	0.371	0.145
7.0	0.319	0.345	4.55	0.394	0.146
7.7	0.169	0.324	5.06	0.399	—
8.2	0.157	—	5.13	0.408	0.141
8.4	—	0.319	5.38	0.404	0.140
			5.42	0.397	0.141
			5.50	0.387	0.143
			5.61	0.401	0.143
			5.80	0.394	0.138
			6.29	0.378	0.138
			7.28	0.271	0.143
			8.56	0.156	0.123

S_n, surface en m^2 par mg de protéines de poumon normal,
S_i, surface en m^2 par mg de protéines de poumon intoxiqué.

et celle de poumon intoxiqué. De plus, la courbe de poumon desséché intoxiqué se diffère de celle de poumon frais intoxiqué par un nombre d'étalement S plus petit, ce qui montre que l'action de phosgène est plus active dans le premier cas.

4. *Action du phosgène sur les protéines étalées en couche monomoléculaire.*

Il serait intéressant de savoir si la modification moléculaire après l'intoxication est immédiate et irréversible. Pour cela on étale une couche monomoléculaire de protéines sur la solution tampon et on fait agir le phosgène à travers un petit arrosoir en verre dur sur toute la surface étudiée (fig. 2).

En tenant l'ampoule de phosgène (point d'ébulition 8,2° C.) dans la main, le phosgène s'évapore graduellement. Dans l'expérience relatée on attend une minute après l'étalement, puis on fait agir le phosgène pendant une minute et on attend de nouveau deux minutes avant les mesures. La quantité de phosgène évaporée était 0,843 gr. On fait des expériences témoins sans phosgène avant et après l'expérience d'intoxication. Pour ces témoins on attend également 4 min. après l'étalement de la couche monomoléculaire. Les deux témoins ont donné sensiblement le même résultat. Pour le calcul on a pris la moyenne de ces témoins. La figure 3 montre le résultat de l'expérience à $pH = 5{,}25$.

La surface S occupée par 1 mg de protéines sous pression zéro est obtenue par extrapolation de la droite représentée par l'équation

$$S = a + b\ (F - \overline{F})$$

où F désigne la force en dynes/cm, a et b sont des constantes à déterminer. On trouve

protéines de poumon normal 135	$a_1 = 275{,}5 \times 10^{-3}$	$b_1 = 9{,}0 \times 10^{-3}$
les mêmes après l'action de phosgène	$a_2 = 333{,}5 \times 10^{-3}$	$b_2 = 8{,}6 \times 10^{-3}$

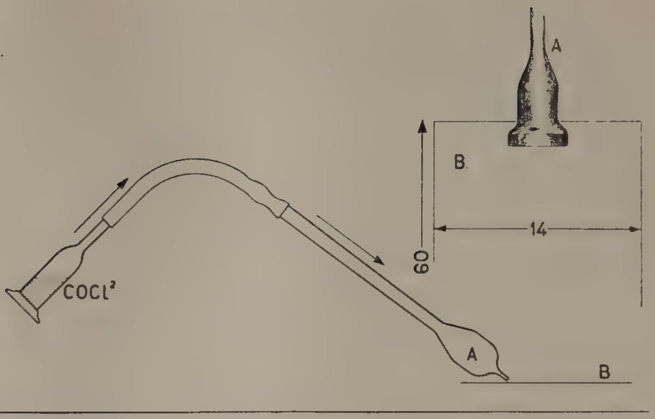


Fig. 2.
Action du phosgène sur la couche monomoléculaire de protéines.
A = arrosoir en verre dur
B = couche monomoléculaire de protéines.

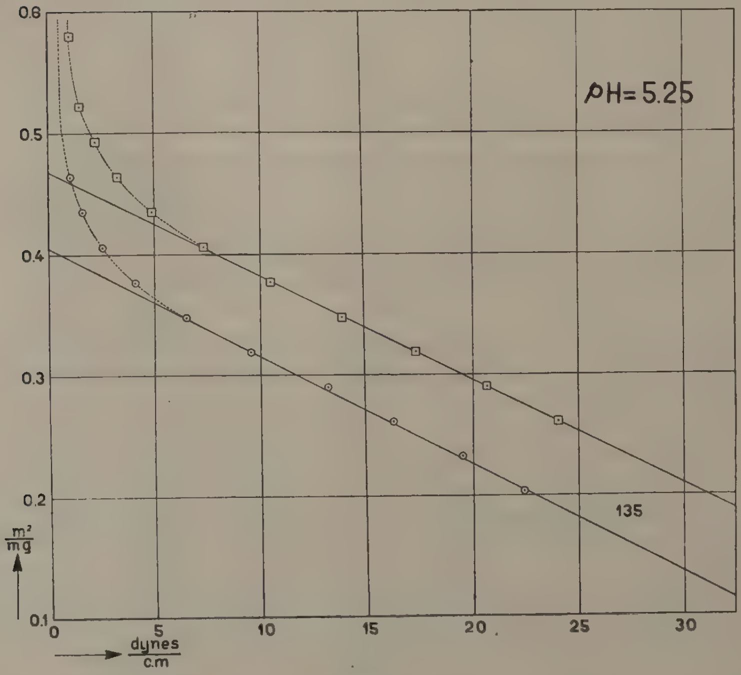


Fig. 3.
Relation entre la surface en m² par mg de protéines et la pression superficielle des protéines normales ou traitées par le phosgène. Poumon 135.

○ poumon normal
☐ poumon intoxiqué

La surface occupée par 1 mg de protéines sous pression zéro est égale à

protéines de poumon normal	$S_1 = 0{,}405$ m²/mg
les mêmes après l'action de phosgène	$S_2 = 0{,}468$ m²/mg

On peut se demander si la différence de surface observée $S_2 - S_1 = 0{,}063$ m²/mg est réelle. L'écart type de la différence est égal à $\sigma_{S_2 - S_1} = 1{,}906 \times 10^{-3}$ et le rapport $\frac{S_2 - S_1}{\sigma_{S_2 - S_1}} = 33{,}1$. La différence de surface observée est fortement significative. L'action de phosgène sur les protéines est donc immédiate. D'autres expériences réalisées à $p\mathrm{H} = 1$ et $p\mathrm{H} = 8{,}2$ donnent des résultats moins nets et difficiles à reproduire. Voici les moyennes de trois expériences chacune, à $p\mathrm{H} = 1$, $S_1 = 0{,}499$, $S_2 = 0{,}516$ et à $p\mathrm{H} = 8{,}2$, $S_1 = 0{,}192$ et $S_2 = 0{,}224$ m²/mg.

5. *Résultat obtenu avec les lipoïdes.*

Les lipoïdes ont donné des résultats reproduits dans le tableau 2. La surface moyenne par mg de lipoïdes est égale à $\overline{S}_n = 0{,}583$ m² pour le poumon normal et $\overline{S}_i = 0{,}718$ m² pour le poumon intoxiqué.

La différence de ces moyennes est-elle significative. A l'aide de la distribution de t, on trouve $t = 2{,}363$ et la probabilité pourque, $t > 2{,}363$ est égale à $P = 0{,}06$. La différence est significative, mais elle n'est pas très marquée. Si l'on avait examiné trois extraits lipoïdiques de plus dans les mêmes conditions, on aurait $P < 0{,}01$ et la différence deviendrait très significative.

TABLEAU 2.

Lipoïdes de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène.

	Poumon normal		Poumon intoxiqué		Différence
	S'_n	S_n	S'_i	S_i	$S_i - S_n$
Poumon 135, extrait acétonique	2.22	0.49	5.87	0.77	+0.28
Poumon 135, extrait à l'éther de pétrole	2.36	0.56	1.89	0.64	+0.08
Poumon 133, extrait acétonique	7.07	0.70	4.74	0.79	+0.09
Poumon 133, extrait à l'éther de pétrole	2.37	0.58	2.72	0.67	+0.09
Moyennes		0.583		0.718	+0.135

S'_n et S_n, surface en m² par cc d'extrait lipoïdique ou par mg de lipoïdes de poumon normal.

S'_i et S_i, surface en m² par cc d'extrait lipoïdique ou par mg de lipoïdes de poumon intoxiqué.

On peut en conclure que la différence obtenue $S_i - S_n$ est dûe à des variations qualitatives des substances lipoïdiques. On sait que le nombre d'étalement S d'une substance lipoïdique est d'autant plus élevé à mesure qu'elle contient plus de groupes polaires par molécule. Ainsi, par exemple, l'acide oléique occupe une surface deux fois plus grande que l'acide palmitique. Le même résultat a été observé entre la lécithine et la hydrolécithine, de même entre l'acide myristique (C^{14}) à 40° C et l'acide stéarique (C^{18}) à la même température. Cette explication, y inclut le cas d'une oxydation de substances lipoïdiques par le phosgène, nous paraît plus probable que celle qui attribue une plus grande étalement par la formation de complexes qui s'étalent moins bien et qui pourraient être formés par polymérisation.

Il est à remarquer que les lipoïdes de poumon montrent des anomalies dans l'étalement moléculaire, comme on a constaté dans un mélange de lipoïdes différents.

6. *Points isoélectriques des protéines.*

La détermination du point isoélectrique a été réalisée à l'aide de poudre de quartz couvert d'une couche de protéines et placé dans un champ électrique (méthode de H. G. BUNGENBERG DE JONG). On trouve ainsi pour les protéines du poumon normal 123 un point isoélectrique égal à 4,58 et pour les protéines du même poumon intoxiqué la valeur 5,16. Il y a donc une différence nette. Elle se montre également dans la courbe $v = f(pH)$ où v désigne la vitesse des particules et pH la concentration en ions hydrogène. La courbe du poumon intoxiqué est plus applatie, elle correspond à celle obtenue par les couches monomoléculaires (fig. 1).

(Laboratoire KAMERLINGH ONNES, Clinique médicale des Enfants de l'Université et Instituut voor preventieve Geneeskunde à Leyde).

Mathematics. — *Pseudokonvergente Folgen in nichtarchimedisch bewerteten Körpern.* Von F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

Wir nennen eine unendliche Folge $\{a_i\}$ von Elementen $a_1, a_2, \ldots$ eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers K[1]) pseudokonvergent[2]), wenn für alle $i \geqq i_0$

$$\text{entweder durchweg} \quad |a_{i+1} - a_i| < |a_i - a_{i-1}| \quad \text{oder durchweg} \quad a_i = a_{i+1}.$$

Für eine pseudokonvergente Folge $\{a_i\}$ aus K gilt die Eigenschaft, dasz die Folge $\{|a_i|\}$ der Bewertungen konvergiert und zwar so, dasz für alle $i \geqq i_0$ entweder

$$\text{a.} \quad |a_i| = |a_{i+1}| \qquad \text{oder} \qquad \text{b.} \quad |a_i| > |a_{i+1}|.$$

Die pseudokonvergente Folge unter a. nennt man von der ersten Art, die unter b. von der zweiten Art. Man nennt $\lim\limits_{i \to \infty} |a_{i+1} - a_i| = \beta$ die Breite der pseudokonvergenten Folge; eine pseudokonvergente Folge ist dann und nur dann konvergent, wenn $\beta = 0$[3]).

Es sei nun $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K, $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge aus K. Wir werden untersuchen, wie die Folge $\{f(a_i)\}$ sich verhält. Den Hauptsatz, der schon von OSTROWSKI[2]) ausgesprochen worden ist, nämlich die Tatsache, dasz die Folge $\{f(a_i)\}$ eine pseudokonvergente Folge darstellt, werden wir hier auf andre Weise herleiten.

Insbesondere werden wir zum Beweis dieses Hauptsatzes keine algebraische Erweiterung von K verwenden. Wenn man sich dann überlegt, wie die Bewertung der Elemente einer einfachen transzendenten Erweiterung $K(x)$ von K durch

$$|r(x)| = \frac{\lim\limits_{i \to \infty} |f_1(a_i)|}{\lim\limits_{i \to \infty} |f_2(a_i)|}$$

dargestellt wird (wo $r(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ eine rationale Funktion mit Koeffizienten aus K), so bringt die Beweisführung mit sich, dasz *zur Bewertung von $K(x)$ die Voraussetzung der Vollständigkeit von K nicht notwendig* ist.

Satz I. *Wenn für eine Folge $\{a_i\}$ von Elementen aus K für $i \geqq i_0: |a_i| > |a_{i+1}|$, so ist die Folge pseudokonvergent.* Es ist nämlich

$$|a_{i+1} - a_i| = |a_i| \quad \text{und} \quad |a_i - a_{i-1}| = |a_{i-1}|, \quad \text{also} \quad |a_{i+1} - a_i| < |a_i - a_{i-1}|.$$

Satz II. *Stellt $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge dar, so stellt die Folge $\{c_1 a + c_2\}$ (c_1 und c_2 aus K) ebenfalls eine pseudokonvergente Folge dar.*

---

[1]) Vgl. 1. KÜRSCHÁK, Ueber Limesbildung und die allgemeine Körpertheorie, J. f. d. r. u. ang. Math. **143** (1913).

2. F. LOONSTRA, Analytische Untersuchungen über bewertete Körper, Amsterdam, 1941 (unwesentlich abgeänderter Wiederabdruck meiner unter demselben titel erschienenen Dissertation); im Folgenden mit *L.* zitiert.

[2]) A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper III, Math. Zeitschrift **39**, 368—374 (1934).

[3]) Die Aussage in L., S. 20 (welche sich in meiner Dissertation auf S. 76 befindet) ist nicht richtig; sie musz lauten: „Ist die pseudokonvergente Folge konvergent, dann ist die Breite 0."

Aus $|a_{i+1}-a_i| < |a_i-a_{i-1}|$ folgt ja:

$$|(c_1 a_{i+1}+c_2)-(c_1 a_i+c_2)| = |c_1|\,|a_{i+1}-a_i| < |c_1|\,|a_i-a_{i-1}| =$$
$$= |(c_1 a_i+c_2)-(c_1 a_{i-1}+c_2)|.$$

Satz III. *Ist*

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0$$

ein Polynom mit Koeffizienten aus K, $\{b_i\}$ eine pseudokonvergente Folge aus K von der zweiten Art, so gibt es ein festes k und ein i_0 mit

$$|f(b_i)| = |c_k b_i^k| \quad \text{für alle} \quad i \geqq i_0.$$ [4]

Beweis: Es ist

$$|f(b_i)| = |c_n b_i^n + c_{n-1} b_i^{n-1} + \ldots + c_2 b_i^2 + c_1 b_i + c_0|.$$

Wenn für ein bestimmtes i die Folge

$$|c_n b_i^n|, |c_{n-1} b_i^{n-1}|, \ldots, |c_2 b_i^2|, |c_1 b_i|, |c_0| \tag{1}$$

nur ein Glied mit maximaler Bewertung enthält, z.B.: $|c_k b_i^k|$, so ist für dieses i: $|f(b_i)| = |c_k b_i^k|$. Es ist aber möglich, dasz für ein andres i die Folge (1) mehr Glieder mit maximaler Bewertung enthält. Deren Anzahl ist höchstens $n+1$. Man kann nun beweisen, dasz unter den gegebenen Umständen die Folge (1) auf die Dauer nur *ein* maximales Glied enthält.

Wir dürfen annehmen, dasz $f(x)$ nicht identisch verschwindet.

Sei V_i die Menge aller Indices r, für die $|c_r b_i^r|$ maximal ist. Sei s ein Index aus V_{i+p} $(p>0)$ und r ein Index aus V_i, so ist

$$|c_r b_{i+p}^r| \leqq |c_s b_{i+p}^s| \quad \text{und} \quad |c_s b_i^s| \leqq |c_r b_i^r|,$$

$$|b_{i+p}^{r-s}| \leqq \left|\frac{c_s}{c_r}\right| \quad \text{und} \quad |b_i^{r-s}| \geqq \left|\frac{c_s}{c_r}\right|,$$

also

$$|b_i|^{r-s} \geqq |b_{i+p}|^{r-s}$$

und wegen $|b_i| > |b_{i+p}|$ $(p>0)$ ist $r-s \geqq 0$ und $r \geqq s$, d.h.: jeder Index von V_i ist kleiner als jeder Index aus V_{i+p} $(p>0)$ oder höchstens diesem gleich.

Sei $\varkappa_i$ der kleinste und γ_i der gröszte Index aus V_i, dann ist

$$\varkappa_i \leqq \gamma_i \leqq \varkappa_{i+1} \leqq \gamma_{i+1} \leqq n.$$

Also gibt es ein i_0 mit $\varkappa_i = \varkappa_{i_0}$ und $\gamma_i = \gamma_{i_0}$ für alle $i \geqq i_0$.

Wegen $\varkappa_i \leqq \gamma_i \leqq \varkappa_{i+1} = \varkappa_i$ $(i \geqq i_0)$ ist $\varkappa_i = \gamma_i$ für alle $i \geqq i_0$, d.h.: V_i besteht aus genau einem Element für $i \geqq i_0$. Setzt man $\varkappa_i = \gamma_i = k$, so ist demnach

$$|f(b_i)| = |c_k b_i^k| \quad \text{für alle} \quad i \geqq i_0.$$

Wir betrachten nunmehr eine Folge $\{f(a_i)\}$, wo $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus einem nichtarchimedisch bewerteten Körper K, $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge aus K darstellt.

Wir unterscheiden folgende zwei Möglichkeiten:

1. Es gibt in K ein solches Element α, dasz die Folge $\{a_i - \alpha\}$ pseudokonvergent 2. Art ist.
2. Es gibt in K kein α mit der obigen Eigenschaft.

---

[4] Satz III steht mit einem Satz von SCHNIRELMANN in Zusammenhang. Vgl. I., S. 92.

Satz IV. *Sei $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge. Es gebe weiter in K kein Element α derart, dasz die pseudokonvergente Folge $\{a_i - \alpha\}$ von der 2. Art ist. Sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K. Dann ist $|f(a_i)|$ konstant von einem gewissen i_0 an.*

Beweis: Wir dürfen annehmen, dasz K unendlichviele Elemente besitzt. Wir zeigen die Existenz von Elementen $\vartheta_k \in K$ derart, dasz

$$f(x) = e_n (x - \vartheta_n)^n + e_{n-1} (x - \vartheta_{n-1})^{n-1} + \ldots + e_1 (x - \vartheta_1) + e_0$$

und für jedes feste $i \geqq i_0$ die nichtverschwindenden unter den Zahlen

$$|e_n (a_i - \vartheta_n)^n|, |e_{n-1} (a_i - \vartheta_{n-1})^{n-1}|, \ldots, |e_1 (a_i - \vartheta_1)|, |e_0|$$

alle untereinander verschieden sind.

Ist bereits für ein $k < n$

$$f(x) = d_n (x - \vartheta_n)^n + d_{n-1} (x - \vartheta_{n-1})^{n-1} + \ldots + d_{n-k} (x - \vartheta_{n-k})^{n-k} + \\ + d_{n-k-1} x^{n-k-1} + \ldots + d_1 x + d_0$$

mit (für jedes $i \geqq i_{k-1}$) untereinander verschiedenen (oder verschwindenden)

$$|d_n (a_i - \vartheta_n)^n|, |d_{n-1} (a_i - \vartheta_{n-1})^{n-1}|, \ldots, |d_{n-k} (a_i - \vartheta_k)^{n-k}|$$

gezeigt, so ergibt sich dasselbe mit $k+1$ statt k folgendermaszen:

Man musz ϑ_{n-k-1} so bestimmen, dasz (falls $d_{n-k-1} \neq 0$ ist)

$$|d_{n-k-1} (a_i - \vartheta_{n-k-1})^{n-k-1}| \neq |d_{n-j} (a_i - \vartheta_{n-j})^{n-j}| \qquad (j \leqq k)$$

ist, d.h. dasz

$$|a_i - \vartheta_{n-k-1}| \neq \left| \frac{d_{n-j}}{d_{n-k-1}} (a_i - \vartheta_{n-j})^{n-j} \right|^{\frac{1}{n-k-1}} = r_{ij}$$

Für ϑ_{n-k-1} sind demnach verboten gewisse Kreisperipherien mit den abzählbar vielen Mittelpunkten a_i und den Radien r_{ij} $(j = 1, \ldots, k)$; hierbei ist, da $\{a_i - \alpha\}$ stets von 1. Art war, $r_{ij} = R_j$ für alle $i \geqq i_k$. Wir brauchen nun ϑ_{n-k-1} nur so zu wählen, dasz

$$|\vartheta_{n-k-1}| > \max (R_1, \ldots, R_k) + |a_1| \quad \text{ist.}$$

Dann ist

$$|a_i - \vartheta_{n-k-1}| > \max (R_1, \ldots, R_k) + |a_1| - |a_i|,$$
$$\text{also} \; > \max (R_1, \ldots, R_k), \quad \text{also} \; \neq R_j.$$

Die gewünschte Bestimmung von ϑ_{n-k-1} ist also in der Tat möglich und wir gelangen schlieszlich induktiv zu der Darstellung

$$f(x) = e_n (x - \vartheta_n)^n + e_{n-1} (x - \vartheta_{n-1})^{n-1} + \ldots + e_1 (x - \vartheta_1) + e_0,$$

wo für jedes $i \geqq i_0$ die nichtverschwindenden unter den Zahlen

$$|e_n (a_i - \vartheta_n)^n|, |e_{n-1} (a_i - \vartheta_{n-1})^{n-1}|, \ldots, |e_1 (a_i - \vartheta_1)|, |e_0|$$

untereinander verschieden sind. Da die Folgen $\{a_i - \alpha\}$ alle 1. Art waren, darf man annehmen, dasz für $i \geqq i_0$ und jedes j

$$|e_j (a_i - \vartheta_j)^j|$$

konstant ist. Also ist auch

$$|f(a_i)| = \operatorname*{Max}_{j=0,\ldots,n} |e_j (a_i - \vartheta_j)^j|$$

konstant, w.z.b.w.

Satz V. *Sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus einem nichtarchimedisch bewerteten Körper K, $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge, so stellt die Folge $\{f(a_i)\}$ eine pseudokonvergente Folge dar; sie konvergiert dann und nur dann, wenn die pseudokonvergente Folge $\{a_i\}$ konvergiert.*

Beweis: 1. Es existiert in K kein Element α, so dasz die Folge $\{a_i - \alpha\}$ von der zweiten Art ist.

Der TAYLORsche Satz liefert

$$f(x) - f(a_i) = f_n(a_i)(x - a_i)^n + f_{n-1}(a_i)(x - a_i)^{n-1} + \ldots + f_1(a_i)(x - a_i).$$

Nach Satz IV sind die $f_{n-k}(a_i)$ konstant für $i \geqq i_k$.

Wir schlieszen nun wie beim Beweis von Satz III:

V_i sei die Menge der Indices r für die $f_r(a_i)(a_{i+1} - a_i)^r$ maximal unter den Zahlen

$$f_n(a_i)(a_{i+1} - a_i)^n, \ldots, f_1(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$

ist.

Wegen $|a_{i+1} - a_i| < |a_i - a_{i-1}|$ hat man wieder für fast alle i

$$\varkappa_i \leqq \gamma_i \leqq \varkappa_{i+1} \leqq \gamma_{i+1} \leqq n,$$

wo $\varkappa_i$ und γ_i wieder gröszter und kleinster Index aus V_i sind.

Schlieszlich erhält man

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = |f_k(a_i)(a_{i+1} - a_i)^k| = \text{konst.} \cdot |a_{i+1} - a_i|^k \text{ für fast alle } i.$$

Hieraus folgt

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \text{konst.} \cdot |a_{i+1} - a_i|^k > \text{konst.} \cdot |a_i - a_{i-1}|^k = |f(a_i) - f(a_{i-1})|$$

falls konst. $\neq 0$, und

$$|f(a_{i+1}) - f(a_i)| = 0 \quad \text{oder} \quad f(a_{i+1}) = f(a_i)$$

falls konst. $= 0$, also jedenfalls nach Satz I die Pseudokonvergenz von $\{f(a_i)\}$. Man sieht weiter:

$$\lim_{i \to \infty} \{f(a_{i+1}) - f(a_i)\} = 0$$

dann und nur dann, wenn entweder $\lim\limits_{i \to \infty} (a_{i+1} - a_i) = 0$ oder konst. $= 0$, d.h.: wenn entweder die pseudokonvergente Folge $\{a_i\}$ konvergiert oder $f(a_i)$ konstant ist, was wiederum auch nur bei Konvergenz von $\{a_i\}$ möglich ist. Auf Grund von Satz IV ist $|f(a_i)|$ für $i \geqq i_0$ konstant, m.a.W.: die Folge $\{f(a_i)\}$ ist von der ersten Art.

2. Es existiert in K ein Element α, so dasz die Folge $\{a_i - \alpha\}$ von der zweiten Art ist. Sei

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

und nennen wir die Folge $\{a_i - \alpha\} = \{b_i\}$, so ist

$$f(a_i) = f(\alpha + b_i) = F(b_i),$$

wo

$$F(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0; \ d_\nu \in K \quad \text{und} \quad d_0 = f(\alpha).$$

Die Pseudokonvergenz der Folge $\{f(a_i)\}$ beweist man mit Hilfe der Folge $\{g(b_i)\}$, wo $g(x) = F(x) - d_0$, denn

$$|g(b_{i+1}) - g(b_i)| = |F(b_{i+1}) - d_0 - F(b_i) + d_0| = |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Nun ist

$$|g(b_i)| = |d_n b_i^n + d_{n-1} b_i^{n-1} + \ldots + d_1 b_i|,$$

wo die d_ν Konstanten darstellen, welche nur von c_k und α abhängig sind.

Die Folge $\{b_i\}$ ist pseudokonvergent 2. Art; mithin läszt sich hier Satz III anwenden: von einem bestimmten Index $i = i_0$ an wird also nur ein Glied $d_k b_i^k$ eine maximale Bewertung besitzen, d.h.:

$$|g(b_i)| = |d_k b_i^k|, \tag{2}$$

für festes k und $i \geqq i_0$. Aus $|b_i| > |b_{i+1}|$ läszt sich also folgern $|g(b_i)| > |g(b_{i+1})|$, m.a.W.: die Folge $\{g(b_i)\}$ ist pseudokonvergent 2. Art. Damit ist auch die Pseudokonvergenz der Folge $\{f(a_i)\}$ für diesen Fall bewiesen.

Aus (2) schlieszt man weiter: die Folge $\{f(a_i) - f(\alpha)\}$ konvergiert dann und nur dann, wenn die Folge $\{a_i - \alpha\}$ konvergiert. Konvergiert $\{f(a_i)\}$, so konvergiert auch die Folge $\{f(a_i) - f(\alpha)\}$, (denn $|f(a_{i+p}) - f(a_i)| = |(f(a_{i+p}) - f(\alpha)) - (f(a_i) - f(\alpha))|$) mithin die Folge $\{a_i - \alpha\}$, mithin schlieszlich $\{a_i\}$. Umgekehrt kann man schlieszen, dasz die Folge $\{f(a_i)\}$ konvergiert, wenn $\{a_i\}$ konvergiert.

Satz VI. *Ist $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge aus K, und ist $f(x)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus K, so ist die Folge $\{f(a_i)\}$ nur dann eine Nullfolge, wenn die Folge $\{a_i\}$ konvergiert und eine Wurzel von $f(x)$ zum Limes hat.*

Beweis: In Satz V ist bewiesen: konvergiert die Folge $\{f(a_i)\}$, so konvergiert auch $\{a_i\}$. Setzt man also $\lim a_i = \pi$, dann ist wegen der Stetigkeit von $f(x)$ $\lim\limits_{i \to \infty} f(a_i) = f(\pi)$. Setzt man voraus, dasz $\{f(a_i)\}$ eine Nullfolge ist, so ist $f(\pi) = 0$ und demnach π eine Wurzel von $f(x) = 0$.

Zum Schlusz sei noch auf folgendes hingewiesen: Stellt $\{a_i\}$ eine pseudokonvergente Folge 2. Art dar, $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K, so ist

$$|f(a_i)| = |c_n a_i^n + c_{n-1} a_i^{n-1} + \ldots + c_1 a_i + c_0|$$

und von einem bestimmten Index $i = i_0$ an $|f(a_i)| = |c_k a_i^k|$ ($i \geqq i_0$, k eine feste Zahl 1, 2, ... oder n) oder $|f(a_i)| = |c_0|$.

Wenn also auf die Dauer das letzte Glied von $f(x)$ die maximale Bewertung beibehält, so ist die Folge $\{f(a\ )\}$ von der ersten Art; behält c_0 nicht die maximale Bewertung bei, so ist (wenn die Folge $\{a_i\}$ 2. Art ist) die Folge $\{f(a_i)\}$ 2. Art. Insbesondere ist die Folge $\{f(a_i)\}$ immer dann von der zweiten Art, wenn $f(x)$ kein konstantes Glied enthält. Letztere Tatsache ergibt sich auch aus Satz II und der Eigenschaft: die Folge der Produkte der entsprechenden Glieder von zwei pseudokonvergenten Folgen, von denen mindestens eine von der zweiten Art ist, ist ebenfalls von der zweiten Art. Die Folge $\{f(a_i)\} = \{c_n a_i^n + \ldots + c_1 a_i\}$ kann man sich wie folgt aufgebaut denken:

$$\{a_i\} \rightarrow \{c_n a_i + c_{n-1}\} \rightarrow \{c_n a_i^2 + c_{n-1} a_i + c_{n-2}\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \ldots \rightarrow \{c_n a_i^{n-1} + c_{n-1} a_i^{n-2} + \ldots + c_2 a_i + c_1\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \ldots \rightarrow \{a_i (c_n a_i^{n-1} + c_{n-1} a_i^{n-2} + \ldots + c_2 a_i + c_1)\} = \{f(a_i)\};$$

Auf Grund der letzten Multiplikation mit den Gliedern a_i einer pseudokonvergenten Folge 2. Art, ist also auch $\{f(a_i)\}$ 2. Art.

Mathematics. — *Conformal differential geometry.* IV. *Surfaces in three-dimensional space.* By J. HAANTJES. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

§ 3. *The curvature affinors.*

We have introduced in R_3 a covariant derivative, the parameters of which are given by (18) and (19) *). Since the Γ^h_{ji} have been defined for points of the surface S only, it is impossible to compute all the components of the corresponding curvature affinor. From

$$2\nabla_{[\beta}\nabla_{\alpha]}v^h = K_{\beta\alpha i}^{\cdot\cdot\cdot h}\,v^i \quad \dots\dots\dots \quad (41)$$

the components $K_{\beta\alpha i}^{\cdot\cdot\cdot h}$ may be determined. It is found that [9])

$$K_{\beta\alpha i h} = 4\,G_{[\beta[i}\,P_{\alpha]h]};\quad G_{\beta i} = B^h_\beta\,G_{hi}, \quad \dots\dots \quad (42)$$

where

$$P_{\alpha i} = \partial_\alpha q_i - q_\alpha q_i + \tfrac{1}{2}B^j_\alpha g_{ji}\,q_h q^h = \nabla_\alpha q_i + q_\alpha q_i - \tfrac{1}{2}B^j_\alpha g_{ji}\,q_h q^h. \quad (43)$$

This quantity $P_{\alpha i}$ can be written in the form

$$P_{\alpha i} = V_\alpha N_i + V_{\alpha\beta}B^\beta_i. \quad \dots\dots\dots \quad (44)$$

We have from (43)

$$V_\alpha = P_{\alpha i}N^i = H_\alpha^{\cdot\beta}\,q_\beta + \varrho^{-1}\partial_\alpha l \quad \dots\dots \quad (45)$$

$$V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha} = P_{\alpha i}B^i_\beta = \delta_\alpha q_\beta - q_\alpha q_\beta + \tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\,q_\gamma q^\gamma - l\,h_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}l^2 a_{\alpha\beta}. \quad (46)$$

where δ_α denotes the covariant derivative with respect to $a_{\alpha\beta}$. The tensor $V_{\alpha\beta}$ will be called the *third fundamental tensor.*

The curvature affinor $K_{\delta\gamma\beta\alpha}$ belonging to the covariant derivative $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ on S has the form

$$K_{\delta\gamma\beta\alpha} = -2K\,A_{\delta[\beta}\,A_{\alpha]\gamma}, \quad \dots\dots\dots \quad (47)$$

the surface S being a manifold of two dimensions. The scalar K will be called the *conformal curvature of the surface.*

§ 4. *The fundamental relations between the quantities $A_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\beta}$ and V_α.*

The alternating part of the second covariant derivative of B^h_β can be found from (26) and (27).

$$2\nabla_{[\delta}\nabla_{\gamma]}B^h_\beta = 2(\nabla_{[\delta}H_{\gamma]\beta})N^h - 2H_{\beta[\gamma}H_{\delta]}^{\cdot\alpha}B^h_\alpha. \quad \dots\dots \quad (48)$$

But on the other hand we have

$$2\nabla_{[\delta}\nabla_{\gamma]}B^h_\beta = -K_{\delta\gamma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}B^h_\alpha + K_{\delta\gamma i}^{\cdot\cdot\cdot h}B^i_\beta. \quad \dots\dots \quad (49)$$

---

*) The numbers (1), ..., (40) refer to formulae given in the paper: Conformal differential geometry III, published in these Proceedings.

[9]) Comp. J. A. SCHOUTEN and D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Noordhoff, Groningen 1938, p. 200.

If the equation, expressing that the right-hand members of (48) and (49) are equal, is multiplied by $G_{hi} B^i_\alpha$ and N_h respectively, two equations are obtained, which are the conformal equivalents of the *equations of* GAUSS *and* CODAZZI.

Using (28*b*) these equations may be put in the following form:

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad K_{\delta\gamma i h} B^i_\beta B^h_\alpha = K_{\delta\gamma\beta\alpha} - 2 A_{\beta[\delta} A_{\gamma]\alpha} \\ &b)\quad K_{\delta\gamma i h} B^i_\beta N^h = 2 \nabla_{[\delta} H_{\gamma]\beta}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

The equation (50*b*) can be obtained in the same way by considering the alternating part of the second covariant derivative of N^h. In consequence of (42) and (47) the equations (50) are reducible to

$$\boxed{\begin{aligned} &a)\quad A^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + K + 1 = 0, \\ &b)\quad \nabla_{[\gamma} H_{\beta]\alpha} = - V_{[\gamma} A_{\beta]\alpha}. \end{aligned}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Another differential equation is obtained from (43) by covariant differentiation to u^β and alternation over the suffixes β and α. We get the equation

$$2 \nabla_{[\beta} P_{\alpha] i} = - K_{\beta\alpha i}^{\cdot\cdot\cdot h} q_h + 2 q_{[\alpha} \nabla_{\beta]} q_i - 2 g_{ji} B^j_{[\alpha} (\nabla_{\beta]} q_h) q^h, \quad . \quad (52)$$

which reduces readily to

$$\nabla_{[\beta} P_{\alpha] i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

by means of (42) and (43). If the expression (44) for $P_{\alpha i}$ is substituted in this equation, we obtain the two following equations, which are equivalent with (53)

$$\boxed{\begin{aligned} &a)\quad \nabla_{[\beta} V_{\alpha]} = V_{\gamma[\beta} H_{\alpha]}^{\cdot\gamma}, \\ &b)\quad \nabla_{[\gamma} V_{\beta]\alpha} = - V_{[\gamma} H_{\beta]\alpha}. \end{aligned}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

In multiplying (51*b*) by $A^{\alpha\gamma}$ we get

$$V_\beta = \nabla_\alpha H_\beta^{\cdot\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

which equation is equivalent with (51*b*).

From (28) it follows by covariant differentiation

$$a)\quad A^{\alpha\beta} \nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = 0 \qquad b)\quad H^{\alpha\beta} \nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Now the covariant derivative of $H_{\alpha\beta}$ can be expressed as a linear form in $A_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ and $C_{\alpha\beta}$ with vector coefficients. These vector coefficients may be found by multiplying $\nabla_\gamma H_{\alpha\beta}$ by $A^{\alpha\beta}$, $H^{\alpha\beta}$ and $C^{\alpha\beta}$ respectively. Therefore, we have as a consequence of (56)

$$\nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = U_\gamma C_{\alpha\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

As may be seen from (55) and (57) the vector U_β is related with the vector V_β by the following equations

$$V_\beta = U_\alpha C^{\alpha}_{\cdot\beta}; \qquad U_\beta = V_\alpha C^{\alpha}_{\cdot\beta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Hence we have

$$H_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta = H_{\alpha\beta} C^{\alpha}_{\cdot\gamma} V^\gamma V^\beta = I_{\beta\gamma} V^\gamma V^\beta = 0 \ , \quad . \quad . \quad (59)$$

which states that U^α and V^α are conjugate vectors with respect to the second fundamental tensor $H_{\alpha\beta}$.

From (57) and (36) we may derive the covariant derivative of the unit vectors P^α and Q^α

$$\nabla_\beta P^\alpha = \tfrac{1}{2} U_\beta Q^\alpha; \qquad \nabla_\beta Q^\alpha = -\tfrac{1}{2} U_\beta P^\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Consequently

$$2 \nabla_{[\gamma} \nabla_{\beta]} P^\alpha = K_{\gamma\beta\delta}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\alpha} P^\delta = (\nabla_{[\gamma} U_{\beta]}) Q^\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Multiplication by $Q_\alpha I^{\gamma\beta}$ leads by means of (47) and (58) to

$$K = -\tfrac{1}{2} I^{\alpha\beta} \nabla_\alpha U_\beta = -\tfrac{1}{2} \nabla_\alpha H^{\alpha\beta} V_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

§ 5. *The fundamental theorems.*

We may ask whether a surface is determined by its fundamental tensors. The answer is given by the following theorem [10]: *When the tensors $A_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$, $H_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ and $V_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ satisfy the equation* (28), (51) *and* (54), *in which the vector V^α has to be replaced by the expression* (55), *there exists a surface, unique to within conformal representations, for which these tensors are respectively the first, second and third fundamental tensor.*

In order to prove this theorem we consider the equations (comp. (26), (27) and (43))

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_\alpha x^h = B_\alpha^h; \ \partial_\alpha \varrho = \varrho q_\alpha \\
&\nabla_\beta B_\alpha^h \equiv \partial_\beta B_\alpha^h - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma B_\gamma^h + q_\alpha B_\beta^h + q_\beta B_\alpha^h - A_{\beta\alpha} \varrho^{-2} g^{hi} q_i = H_{\beta\alpha} N^h \\
&\nabla_\beta N^h \equiv \partial_\beta N^h + q_\beta N^h + q_i N^i B_\beta^h = -H_\beta^{\cdot\alpha} B_\alpha^h \\
&\nabla_\alpha q_i = \varrho^2 V_\alpha g_{ih} N^h + V_{\alpha\beta} B_i^\beta - q_\alpha q_i + \tfrac{1}{2} B_\alpha^j g_{ji} q_h q^h.
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

as differential equations for the quantities x^h, B_α^h, N^h, q_i and ϱ. In the first place we remark that all the conditions of integrability of these equations are satisfied in consequence of (51) and (54). Hence the system (63) admits a unique set of solutions, whose values for the initial values of u^α are given arbitrarily. These values are chosen so, that for $u^\alpha = u_0^\alpha$

$$\left.\begin{aligned}
T^{\alpha\beta} &\equiv g_{hi} B_\alpha^h B_\beta^i - \varrho^{-2} A_{\alpha\beta} = 0 \\
T^\alpha &\equiv g_{hi} B_\alpha^h N^i = 0 \\
T &\equiv g_{hi} N^h N^i - \varrho^{-2} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

By means of (63) the derivatives of T, T_α and $T_{\alpha\beta}$ can be found. These expressions appear to be linear and homogeneous in T, T_α and $T_{\alpha\beta}$. Thus, as follows from the theory of differential equations, the equations (64) are true for all values of u^α.

As a result of this the surface given by the solution

$$x^h = x^h(u^\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

has the given tensors $A_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ and $V_{\alpha\beta}$ as conformal first, second and third fundamental tensor.

As in ordinary differential geometry another choice of the initial values of x^h, B_α^h and N^h leads to another surface, which can be obtained from the surface (65) by a motion in space. For by a motion in space we could make these x^h, B_α^h and N^h equal to the corresponding ones of the first system of initial values. By another choice of the values of q_i and ϱ for $u^\alpha = u_0^\alpha$ we obtain a surface, which can be obtained from the surface

---

[10] Comp. T. TAKASU, Differentialgeometrien in den Kugelräumen I, Tokyo 1938, p. 323.

(65) by a conformal transformation in space. This statement may be proved in quite the same way as the corresponding one for curves[11]). Hence by the tensors $A_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ and $V_{\alpha\beta}$ the surface is determined to within conformal representations.

Before we turn to a second fundamental theorem, we prove the following theorem:

The third fundamental tensor is determined by $A_{\alpha\beta}$ *and* $H_{\alpha\beta}$ *except when the scalar* D *defined by*

$$D = C^{\alpha\beta} \nabla_\alpha V_\beta = \nabla_\alpha U^\alpha \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (66)$$

vanishes.

When $V_{\alpha\beta}$ is not determined by $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$, the equations (51*a*) and (54), considered as equations for $V_{\alpha\beta}$, will admit at least two solutions $V_{\alpha\beta}$ and $V^*_{\alpha\beta}$. Then the difference $W_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} - V^*_{\alpha\beta}$ will satisfy the following equations

$$A^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = 0; \;\; W_{\gamma[\beta} H^{\cdot\gamma}_{\alpha]} = 0; \;\; \nabla_{[\gamma} W_{\beta]\alpha} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (67)$$

From the first and second equation of (67) it follows that $W_{\alpha\beta}$ is equal to $\lambda H_{\alpha\beta}$. Substitution in the third equation of (67) gives a differential equation for λ, from which we get after multiplication by $H^{\alpha\gamma}$ the equivalent equation

$$\lambda_\beta = -\lambda H_{\beta\gamma} V^\gamma \qquad (\lambda_\beta = \partial_\beta \lambda). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (68)$$

By covariant differentiation we obtain

$$0 = \nabla_{[\beta} \lambda_{\alpha]} = -\lambda H^{\gamma}_{\cdot[\alpha} \nabla_{\beta]} V_\gamma = -\tfrac{1}{2} \lambda C^{\gamma\delta} (\nabla_\gamma V_\delta) I_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2} \lambda D I_{\alpha\beta}. \qquad (69)$$

Hence the equations (67) admit a non-vanishing solution if and only if $D = 0$. Consequently $V_{\alpha\beta}$ is determined by $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$ unless the invariant D vanishes.

An immediate consequence is the following fundamental theorem[12]).

A surface is determined to within conformal transformations by the first and second fundamental tensor except when the scalar D *defined by* (66) *vanishes.*

The differential equations, which have to be satisfied by $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$, in order that a surface exists with $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$ as fundamental tensors, can be found from the equations (51) and (54) by expressing $V_{\alpha\beta}$ in the form

$$V_{\alpha\beta} = \lambda A_{\alpha\beta} + \mu C_{\alpha\beta} + \nu H_{\alpha\beta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (70)$$

The coefficient λ and μ are determined by the equations (51*a*) and (54*a*), whereas the equation (54*b*) leads to a differential equation for ν. From the condition of integrability of this equation ν can be solved. Substitution of this value for ν in the equation (54*b*) leads to some differential relations between $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$, which have to be satisfied together with the equation (51*b*).

Since the tensors $A_{\alpha\beta}$ and $H_{\alpha\beta}$ are determined by the linear forms $P_\alpha du^\alpha$ and $Q_\alpha du^\alpha$, the preceding result may be expressed in the following form.

If $D \neq 0$ *the surface is determined to within conformal transformations by the linear forms* $P_\alpha du^\alpha$ *and* $Q_\alpha du^\alpha$.

§ 6. *The normal circle*[13]).

It has been shown in C.D.G. II for $n = 2$ that a vector q_i at a point P determines a pencil of circles through P if q_i transforms under conformal transformation as follows

---

[11]) C.D.G. I, p. 822.

[12]) G. THOMSEN, Ueber konforme Geometrie, Abh. Hamburg (1923), (1925); T. TAKASU, l.c., p. 322.

[13]) Under the ∞^2 circles, which are at a point P normal to the surface, the circle defined in this paragraph as the normal circle at P presents itself first in our theory. It will be shown that this circle is different from the normal circle defined by BLASCHKE, l.c., p. 321, but identical with the normal circle used by TAKASU, l.c., p. 334.

$$q'_i = q_i - s_i. \qquad (71)$$

In quite the same way it can be shown for $n=3$ that a vector q_i at $P(x^h_0)$ with the transformation (71) represents a system of ∞^2 spheres passing through two fixed points, one of which is P. The locus of the centers of these spheres is a plane given by

$$q_i (y^i - x^i_0) = 1. \qquad (72)$$

The curvature of the sphere with e^h as normal vector at P is $q_i e^i$. Hence we have

The vector q_i defined by (19) *represents geometrically a net of spheres.* Henceforth this system of spheres will be denoted by (q). The sphere of the system (q), which is at P tangent to the surface has the curvature $q_i n^i = l$. This sphere is therefore identical with the central sphere at P.

Let us consider the spheres belonging to the system (q), which are at the same time at P orthogonal to the surface. The center of such a sphere lies in the tangent plane of P. As a consequence of (72) its local coordinates y^α [14]) satisfy the equation

$$q_\alpha y^\alpha = 1. \qquad (73)$$

Thus the spheres of the system (q) orthogonal to the surface at P form a pencil, whose axis is given by (73). The circle common to the spheres of this pencil (q_α) passes through P and is at P normal to the surface. It will be called the *normal circle* at P. Henceforth it will be denoted by the circle (q_α).

From the preceding results we obtain the following theorem.

A covariant vector w_α with the transformation

$$w'_\alpha = w_\alpha - s_\alpha; \; (s_\alpha = \partial_\alpha \log \sigma) \qquad (74)$$

represents geometrically a pencil of spheres orthogonal to the surface, thus a circle normal to the surface.

Geometrical interpretation of the normal circle. The circle (q_α) may be defined in a more geometrical way as follows. The curvature spheres (comp. § 2) of the same system at two consecutive points of a curve on the surface determine a pencil of spheres. Since there are two systems of curvature spheres, each line element du^α at P is associated with two pencils of spheres passing through P. If the direction of du^α is different from a principal direction, the spheres B_1 and B_2 of these systems which are at P normal to the surface define on their turn a pencil of spheres, whose axis lies in the tangent plane. This latter pencil contains one sphere B, which is at P normal to the line element du_α. To each line element corresponds in this way a sphere B. It can be shown that the center of the sphere B corresponding to the direction of the vector e^α is given by

$$y^\alpha = \frac{e^\alpha}{e^\beta q_\beta}, \qquad (75)$$

from which it follows that B belongs to the system (q_α) and therefore passes through the normal circle at P. Therefore, the normal circle may be defined by means of the spheres B [15]).

Geometrical interpretation of the conformal geodesics. In ordinary differential geometry a geodesic on a surface can be defined as a curve whose principal normal at every point coincides with the normal to the surface. It follows that a geodesic may also be defined as a curve with the property that at every point its osculating circle and the normal to the surface lie in one plane.

---

[14]) The coordinates of the point y^α with respect to (h) are $y^h = x^h_0 + y^\alpha B^h_\alpha$.

[15]) This geometrical definition of the normal circle has been given by TAKASU, l.c., p. 334. Thus the normal circle defined above is identical with that of TAKASU.

An analogous property of conformal geodesics is expressed in the following theorem:

A conformal geodesic on a surface is a curve whose osculating circle at every point lies together with the normal circle on one sphere.

In proving this theorem we consider the sphere normal to the surface through the osculating circle at P of a curve C. The curvature of this sphere is given by the length of the projection on the tangent plane of the curvature vector of C. If C is defined by the equations $u^\alpha = u^\alpha(s)$ this projection is

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\beta\end{matrix}\right\}\frac{du^\gamma}{ds}\frac{du^\beta}{ds} &= \varrho^2\left(\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}\right)+q^\alpha - q_\beta\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\alpha}{ds}\\ &= \varrho^2\left(\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}\right)+(q_\beta e^\beta)\,e^\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

where e_α is a unit vector (with respect to $a_{\alpha\beta}$) normal to $\frac{du^\alpha}{ds}$. The sphere normal to the surface through the osculating circle contains the normal circle if it belongs to the pencil (q_α), thus if its center is given by

$$y^\alpha = (q_\beta e^\beta)^{-1}\, e^\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \tag{77}$$

Hence the vector (76) must be $(q_\beta e^\beta)e^\alpha$. But this implies that the curve C is an integral curve of the differential equation

$$\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{du^\gamma}{d\tau}\frac{du^\beta}{d\tau}=0, \quad \ldots\ldots \tag{78}$$

which means that C is a conformal geodesic. The above theorem may also be stated thus:

The system (q_α) of spheres at P consists of those spheres normal to the surface, which contain the osculating circle of one of the conformal geodesics through P 16).

A special surface. We inquire whether it is possible that the ∞^2 normal circles of a surface pass through a fixed point. Let us suppose that the surface S has this property. Then it is possible to choose the factor σ in (1) so that the normal circles are straight lines with respect to the fundamental tensor g'_{hi}. Consequently all the spheres through the normal circles are planes and have a vanishing curvature with respect to g'_{hi}. Thus, according to (73) we have for the fundamental tensor g'_{hi}

$$q'_\alpha = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \tag{79}$$

This states that

A surface whose normal circles pass through a fixed point is either a surface of constant $\varrho = \varkappa_1 - \varkappa_2$ or it may be obtained from such a surface by a conformal transformation.

These surfaces are of course characterized by a relation between the fundamental quantities. It can be shown

A necessary and sufficient condition that the normal circles of a surface all pass through a fixed point is that

$$V_\alpha = \pm\, \partial_\alpha \sqrt{K+1}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \tag{80}$$

provided that the scalar D defined by (66) *is different from zero.*

The proof of this theorem is omitted, because of the necessary shortness of this note.

---

16) Comp. W. BLASCHKE, l.c., p. 340.

Mathematics. — *Des approximations diophantiques d'un système de formes linéaires complexes.* Par B. MEULENBELD. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

§ 1. Dans une communication précédente [1] M.M. KOKSMA et B. MEULENBELD ont considéré un système de $n+1 \geqq 2$ formes linéaires:

$$L_\nu = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu, n+1} x_{n+1} \quad (\nu = 1, \ldots, n+1)$$

à coefficients réels et à déterminant $\triangle = | \alpha_{\nu\mu} | \neq 0$, et ont déduit un théorème, contenant quelques approximations diophantiques concernant ce système.

Dans le présent article je communiquerai un théorème analogue pour le cas où $L_1, \ldots, L_{n+1}$ sont des formes plus spéciales, mais à coefficients et à variables complexes.

Nous nous bornerons aux considérations des approximations dans le corps quadratique imaginair $K(i\sqrt{m})$. Ici m désigne un nombre naturel, qui ne contient pas comme facteur le carré d'un nombre naturel. Soit en outre

$$\chi = 0, \lambda = 1, \text{ si } m \not\equiv 3 \pmod 4,$$
$$\chi = 1, \lambda = 2, \text{ si } m \equiv 3 \pmod 4.$$

Alors $\left(1, \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda}\right)$ forme une base de $K(i\sqrt{m})$, de sorte que le système des nombres entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ est identique avec le système des nombres

$$P = x + \frac{\chi + i\sqrt{m}}{\lambda} y \quad (x, y \text{ entiers rationnels}).$$

Le théorème principal de cette note est le

Théorème 1. *Soient n et r des nombres naturels, $1 \leqq r \leqq n$, pour $\frac{n+1}{2} \leqq r \leqq n$ le nombre $\gamma_{n,r,m}$ soit désigné par*

$$\gamma_{n,r,m} = \frac{(2\pi\lambda)^{n+1}}{m^{\frac{n+1}{2}}(2n+2)!} \left\{ \frac{1}{r^{2r}} \sum_{\mu=0}^{2r} \binom{2n+2}{\mu} \left(r - \frac{n+1}{2}\right)^{\mu} \left(n-r+1\right)^{r-\mu} + \right. \left. + \frac{(2n+2)r}{n-r+1} \binom{2n+1}{2r} \sum_{\mu=2r+1}^{\infty} \frac{1}{\mu r^{\mu}} \left(r - \frac{n+1}{2}\right)^{\mu} \right\}, \tag{1}$$

et pour $1 \leqq r \leqq n$ le nombre $\gamma^{*}_{n,r,m}$ par

$$\left.\begin{aligned} \gamma^{*}_{n,r,m} &= \gamma_{n,r,m}, && \text{pour } \frac{n+1}{2} \leqq r \leqq n, \\ \gamma^{*}_{n,r,m} &= \gamma_{n,n-r+1,m}, && \text{pour } 1 \leqq r < \frac{n+1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \tag{2}$$

---

[1] J. F. KOKSMA et B. MEULENBELD, Sur le théorème de MINKOWSKI, concernant un système de formes linéaires réelles. Comm. 1, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 256—262 (1942).

Voir aussi Remarque dans Comm. 4, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 584 (1942).

En outre soient $\theta_{\nu\mu} (\nu = 1, \dots n+1;\ \mu = 1, \dots, n+1;\ \nu > \mu)$ *des nombres complexes arbitraires,* $\vartheta_\nu (\nu = 1, \dots, n+1)$ *des nombres réels avec* $|\vartheta_\nu| = 1$, *et* $L_1, \dots, L_{n+1}$ *des formes linéaires:*

$$\begin{aligned} L_1 &= \vartheta_1 x_1 \\ L_2 &= \theta_{21} x_1 + \vartheta_2 x_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_{n+1} &= \theta_{n+1,1} x_1 + \theta_{n+1,2} x_2 + \dots + \theta_{n+1,n} x_n + \vartheta_{n+1} x_{n+1}. \end{aligned}$$

Alors à tout nombre $t > 2$ *au moins un système de nombres entiers par rapport à* $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \dots, P_{n+1})$ *correspond, satisfaisant à*

$$P = max. (|P_1|, \dots, |P_r|) \geqq 1, \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

et aux inégalités simultanées:

$$\sum_{\nu=1}^{r} |L_\nu| \leqq 2 \sqrt[2r]{\frac{t^{2n-2r+2}}{\gamma^*_{n,r,m}}}, \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=r+1}^{n+1} |L_\nu| \leqq \frac{2}{t}, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{r} |L_\nu| \right)^r \left(\sum_{\nu=r+1}^{n+1} |L_\nu| \right)^{n-r+1} \leqq \frac{1}{\sqrt{\gamma^*_{n,r,m}}}, \quad \dots\dots \quad (6)$$

$$|L_1 \dots L_{n+1}| \leqq \frac{1}{\sqrt{\gamma^*_{n,r,m}}\, r^r (n-r+1)^{n-r+1}} \quad \dots\dots \quad (7)$$

Remarques.

1. S'il est possible de trouver un système de nombres entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$, de sorte qu'au moins une des inégalités $L_\nu = 0$ $(\nu = 1, \dots, n+1)$ est valable, il est évident que l'inégalité (7) est triviale.

2. D'après ce théorème il existe pour tout nombre $t > 2$ au moins un système de nombres entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \dots, P_{n+1})$ avec (3), (4), (5), (6) et (7). Si $\sum\limits_{\nu=r+1}^{n+1} |L_\nu| \neq 0$ le système ne peut pas rester le même, quand t croît indéfiniment, comme il ressort immédiatement de (5). Il y a donc une infinité de tels systèmes $(P_1, \dots, P_{n+1})$ avec (3), (6) et (7). Dans les cas où $\sum\limits_{\nu=1}^{r} |L_\nu| = 0$ ou $\sum\limits_{\nu=r+1}^{n+1} |L_\nu| = 0$, cette dernière assertion est triviale, puisque avec $(P_1, \dots, P_{n+1})$ est pour tout nombre entier Z par rapport à $K(i\sqrt{m})$ aussi $(ZP_1, \dots, ZP_{n+1})$ une solution de (6) et (7).

3. Pour $r = n$ les nombres $\gamma_{n,r,m}$ et $\gamma^*_{n,r,m}$ définis par (1) et (2) deviennent:

$$\gamma_{n,m} = \gamma^*_{n,n,m} = \gamma_{n,n,m} = \frac{(2\pi\lambda)^{n+1}}{m^{\frac{n+1}{2}} (2n+2)!} \left\{ \frac{1}{n^{2n}} \sum_{\mu=0}^{2n} \binom{2n+2}{\mu} \left(\frac{n-1}{2} \right)^\mu + \right.$$
$$\left. + (2n+2)(2n+1)n \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{n-1}{2n} \right)^\mu \right\}$$

$$= \frac{(2\pi\lambda)^{n+1}}{m^{\frac{n+1}{2}}(2n+2)!}\left\{\frac{(n+1)^{2n+2}}{2^{2n+2}n^{2n}} - \frac{(2n+2)(n-1)^{2n+1}}{n^{2n}2^{2n+1}} - \frac{(n-1)^{2n+2}}{n^{2n}2^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + (2n+2)(2n+1)n \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{\mu}\right\}$$

$$= \frac{(\pi\lambda)^{n+1}(n+1)^{2n+1}}{2^{n+2}m^{\frac{n+1}{2}}n^{2n}(2n+1)!}\left\{1-(5n+3)\frac{(n-1)^{2n+1}}{(n+1)^{2n+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{2n+3}n^{2n+1}(2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{\mu}\right\},$$

d'où suit

$$\gamma_{n,m} = \frac{(\pi\lambda)^{n+1}(n+1)^{2n+1}}{2^{n+2}m^{\frac{n+1}{2}}n^{2n}(2n+1)!}\left\{1 + \frac{(n-1)^{2n+2}}{(n+1)^{2n+1}n} + \frac{2^{2n+3}n^{2n+1}(2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{\mu}\right\}. \qquad (8)$$

4. J'ai démontré ce théorème à l'aide d'une méthode de M. H. F. BLICHFELDT. Comme la démonstration est très longue, et demande quelques lemmes, il n'est pas possible de la donner dans cette note.

Dans le § 2 de cette communication nous appliquerons le théorème 1 sur l'approximation de la forme linéaire $\theta_1 P_1 + \ldots + \theta_n P_n - P_{n+1}$ à zéro (c'est le théorème 2), et dans le § 3 sur la somme et le produit des approximations simultanées d'un système de nombres complexes $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ par des fractions rationnelles par rapport à $K(i\sqrt{m})$ (c'est le théorème 3).

§ 2. **Théorème 2.** *Soit n un nombre naturel supérieur à 1, $\gamma_{n,m}$ le nombre désigné par (8). Soient en outre $\theta_1, \ldots, \theta_n$ n nombres complexes, et t un nombre réel arbitraire > 2. Alors il y a au moins un système entier par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ avec*

$$P = \max.(|P_1|, \ldots, |P_n|) \geqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

et

$$\sum_{\nu=1}^{n} |P_\nu| \leqq 2 \sqrt[2n]{\frac{t^2}{\gamma_{n,m}}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

tel que la forme linéaire

$$L = \Theta_1 P_1 + \ldots + \Theta_n P_n - P_{n+1}$$

vérifie les inégalités simultanées:

$$|L| \leqq \frac{2}{t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$|L| \leqq \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n,m}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}|P_\nu|\right)^{n}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème 1 avec $L_\nu = P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $L_{n+1} = L$, $r = n$, $\gamma^*_{n,r,m} = \gamma_{n,m}$. Les inégalités (9), (10), (11) et (12) résultent respectivement de (3), (4), (5) et (6). L'inégalité (7) ne nous donne pas une approximation essentielle, puisque les formes $L_\nu = P_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ peuvent être égales à zéro (voir la remarque 1).

Remarques.

5. De la remarque 2 il s'ensuit qu'il y a une infinité de systèmes $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ avec (9) et (12).

6. On voit de (12) que dans l'approximation de L à zéro la quantité $\sum_{\nu=1}^{n} |P_\nu|$ se présente. Une autre approximation de L avec cette quantité, analogue à (12), ne m'est pas connue. M.M. KOKSMA en MEULENBELD ont bien déduit dans un mémoire récent [2]) une approximation de L avec $P = \max. (|P_1|, \ldots, |P_n|)$ au lieu de $\sum_{\nu=1}^{n} |P_\nu|$, et ont démontré [3]) pour une infinité de systèmes entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \ldots, P_{n+1})$:

$$|L| \leqq \sqrt{\frac{2^n}{(2n)!}}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma_{n,m}}\,P^n}.$$

§ 3. **Théorème 3.** *Soit n un nombre naturel supérieur à 1, $\gamma_{n,m}$ le nombre désigné par* (8). *Soient en outre $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un système de n nombres complexes, et t un nombre réel arbitraire > 2.*

Alors il y a au moins un système de nombres entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \ldots, P_{n+1})$, qui satisfont aux inégalités simultanées:

$$1 \leqq |P_{n+1}| \leqq 2\,\frac{t^n}{\sqrt{\gamma_{n,m}}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}}\right| \leqq \frac{2}{t\,|P_{n+1}|},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt[2n]{\gamma_{n,m}\,|P_{n+1}|^{1+\frac{1}{n}}}}, \quad \ldots \quad (13)$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left|\theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n,m}\,n^n}\,|P_{n+1}|^{n+1}}. \quad \ldots \quad (14)$$

Démonstration. Nous appliquons maintenant le théorème 1 avec

$$L_1 = P_{n+1},\ L_\nu = P_{n+1}\,\theta_{\nu-1} - P_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \ldots, n+1),\ r = 1,\ \gamma^*_{n,r,m} = \gamma_{n,m}.$$

Il existe donc au moins un système $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ avec $|P_{n+1}| \geqq 1$, qui satisfait aux inégalités:

$$|P_{n+1}| \leqq \frac{2\,t^n}{\sqrt{\gamma_{n,m}}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |P_{n+1}\,\theta_\nu - P_\nu| \leqq \frac{2}{t},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |P_{n+1}\,\theta_\nu - P_\nu| \leqq \frac{1}{\sqrt[2n]{\gamma_{n,m}\,|P_{n+1}|^{\frac{1}{n}}}},$$

---

[2]) J. F. KOKSMA et B. MEULENBELD, Diophantische Approximationen homogener Linearformen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 426—434 (1941).

[3]) Voir la note [2]) p. 427. Il faut remarquer, que le nombre $\varrho_{n,m}$, qui se présente dans cette note est égal à $\sqrt{\frac{2^n}{(2n)!\,\gamma_{n,m}}}$.

$$\prod_{\nu=1}^{n} |P_{n+1}\,\theta_\nu - P_\nu| \leqq \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n,m}}\, n^n\, |P_{n+1}|}.$$

Ces inégalités entraînent l'assertion du théorème 3.

Remarques.

7. De la remarque 2 il s'ensuit qu'il y a une infinité de systèmes entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ avec $|P_{n+1}| \geqq 1$, (13) et (14).

8. Si les nombres $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont tous irrationnels par rapport à $K(i\sqrt{m})$, l'inégalité (14) n'est pas triviale.

9. On n'a jamais considéré l'approximation de la somme $\sum_{\nu=1}^{n} \left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}} \right|$ et du produit $\prod_{\nu=1}^{n} \left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}} \right|$ à zéro, que je sache. Par contre l'approximation simultanée du système $\theta_1, \ldots, \theta_n$ par des fractions rationnelles par rapport à $K(i\sqrt{m})$ a bien été recherchée. M. N. HOFREITER[4]) communique que M. H. ARAL a déduit dans sa thèse, en se servant d'une méthode de MINKOWSKI, que pour chaque système complexe $\theta_1, \ldots, \theta_n$ une infinité de systèmes entiers par rapport à $K(i\sqrt{m})$ $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ avec $|P_{n+1}| \geqq 1$ vérifient simultanément les inégalités:

$$\left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}} \right| < \frac{2n}{(n+1)\sqrt{\pi}} \sqrt[2n]{\frac{4(2n+1)m^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\pi\lambda^{n+1}}} \frac{1}{|P_{n+1}|^{1+\frac{1}{n}}} (\nu = 1, \ldots, n), \quad (15)$$

résultat, qui pour $m = 1$ est identique avec celui, déduit par MINKOWSKI[5]).

Dans une note récente[6]) M.M. KOKSMA et MEULENBELD ont amélioré le résultat (15) en le portant à

$$\left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}} \right| \leqq \sqrt[2n]{\frac{2^n}{\gamma_{n,m}(2n)!}} \frac{1}{|P_{n+1}|^{1+\frac{1}{n}}} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \quad . \quad (16)$$

où $\gamma_{n,m}$ est le nombre, défini en (8).

En additionnant les dernières inégalités, nous obtenons:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{P_{n+1}} \right| \leqq n \sqrt[2n]{\frac{2^n}{\gamma_{n,m}(2n)!}} \frac{1}{|P_{n+1}|^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Une comparaison de cette inégalité avec (13) nous démontre en vertu de $\frac{2^n n^{2n}}{(2n)!} \geqq 1$, que notre résultat est une amélioration essentielle.

C'est aussi le cas, quand on fait le produit des inégalités (16) et qu'on le compare avec (14).

---

[4]) N. HOFREITER, Diophantische Approximationen komplexer Zahlen. Monatsh. f. Math. u. Physik, 299—302 (1940).

[5]) H. MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, Leipzig-Berlin, 1910, p. 108 e.s.

[6]) J. F. KOKSMA et B. MEULENBELD, Simultane Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 310—323 (1941). Il faut remarquer que le nombre $\gamma_{n,m}$, qui se présente dans cette note est égal à

$$\sqrt[2n]{\frac{2^n}{(2n)!\,\gamma_{n,m}}}.$$

Mathematics. — *Extension d'une série des fonctions de* BESSEL, *due à* LOMMEL, *et de quelques séries des fonctions de* BESSEL *analogues*. I. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

1. Bien connue est la série de LOMMEL [1]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)\,I_{\nu+2n}(x)=\frac{x}{2}\,I_{\nu-1}(x)\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

où ν est arbitraire, qui est une conséquence directe de la propriété suivante des fonctions de BESSEL:

$$\frac{2\mu}{x}\,I_\mu(x)=I_{\mu-1}(x)+I_{\mu+1}(x)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Autres recherches me conduisaient à la série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^3\,I_{\nu+2n}(x)=\nu^2\,\frac{x}{2}\,I_{\nu-1}(x)-x^2\,I_\nu(x),\quad\ldots\quad(3)$$

dont la précision peut être vérifiée aussi directement; car en appliquant (2) pour $\mu=\nu+2n$ on peut écrire pour le membre gauche:

$$\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^2\,\{I_{\nu+2n-1}(x)+I_{\nu+2n+1}(x)\}=$$

$$=\frac{x}{2}\left[\nu^2\,I_{\nu-1}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\{\nu+2n+2)^2-(\nu+2n)^2\}\,I_{\nu+2n+1}(x)\right]=$$

$$=\frac{x}{2}\left\{\nu^2\,I_{\nu-1}(x)-4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+1)\,I_{\nu+2n+1}(x)\right\}=$$

$$=\frac{x}{2}\,\{\nu^2\,I_{\nu-1}(x)-2x\,I_\nu(x)\}\qquad\textit{selon (1).}$$

Ceci me conduisait à l'examination de la série générale:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^m\,I_{\nu+2n}(x),$$

où m est un entier positif. Il paraissait qu'il est possible d'y trouver pour ν arbitraire une expression finie dans le cas où m est impair. En posant donc d'abord:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}\,I_{\nu+2n}(x),\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

où ν est arbitraire et k entier $\geqq 0$, on trouve d'après (2) pour $\mu=\nu+2n$:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k}\,\{I_{\nu+2n-1}(x)+I_{\nu+2n+1}(x)\}.\quad.\quad(5)$$

---

[1]) NIELSEN, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen 1904, p. 270, (3).

En y substituant:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k}I_{\nu+2n-1}(x)=\nu^{2k}I_{\nu-1}(x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+2)^{2k}\,I_{\nu+2n+1}(x), \quad (6)$$

on obtient:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\{\nu+2n+2)^{2k}-(\nu+2n)^{2k}\}\,I_{\nu+2n+1}(x), \quad (7)$$

ou, d'après les réductions suivantes

$$\left.\begin{aligned}&(\nu+2n+2)^{2k}-(\nu+2n)^{2k}=\{1+(\nu+2n+1)\}^{2k}-\{1-(\nu+2n+1)\}^{2k}=\\&=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(\nu+2n+1)^p\{1-(-1)^p\}=2\sum_{p=1,3,\dots}^{2k-1}\binom{2k}{p}(\nu+2n+1)^p=\\&=2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+2n+1)^{2p_1+1};\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n+1)^{2p_1+1}\,I_{\nu+2n+1}(x),$$

de sorte que nous trouvons d'abord, selon (4) en y changeant ν en $\nu+1$, la formule récurrente:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}S_{\nu+1,2p_1+1}(x), \quad . \quad (9)$$

qui nous permet de calculer successivement $S_{\nu,1}(x)$, $S_{\nu,3}(x)$, $S_{\nu,5}(x)$, etc.

Ainsi suit de (9) pour $k=0$:

$$S_{\nu,1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)\,I_{\nu+2n}(x)=\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

c'est la série de LOMMEL (1).

Pour $k=1$ il suit de (9):

$$S_{\nu,3}(x)=\nu^2\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2x\,S_{\nu+1,1}(x)$$

et donc selon (1′) en y changeant ν en $\nu+1$:

$$S_{\nu,3}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^3\,I_{\nu+2n}(x)=\nu^2\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x^2I_\nu(x), \quad (3')$$

c'est la série (3).

En substituant dans (9) $k=2$, on trouve:

$$S_{\nu,5}(x)=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-x\{4\,S_{\nu+1,1}(x)+4S_{\nu+1,3}(x)\},$$

donc selon (1′) et (3′) en y changeant ν en $\nu+1$:

$$\left.\begin{aligned}S_{\nu,5}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^5I_{\nu+2n}(x)=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2x^2\{I_\nu(x)+(\nu+1)^2I_\nu(x)-\\-2x\,I_{\nu+1}(x)\}=\nu^4\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-2(\nu^2+2\nu+2)\,x^2I_\nu(x)+4\,x^3I_{\nu+1}(x),\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

etc.

De (9) on peut aussi déduire une formule générale pour $S_{\nu,2k+1}(x)$; pour cela nous substituons dans (9) pour $S_{\nu+1,2p_1+1}(x)$, l'expression qui suit de (9) en y changeant ν en $\nu+1$, p_1 en p_2 et k en p_1, notamment:

$$S_{\nu+1,\,2p_1+1}(x)=(\nu+1)^{2p_1}\frac{x}{2}I_\nu(x)-x\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x);$$

alors nous obtenons:

$$\begin{aligned}S_{\nu,\,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}&+\\+x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}&S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x),\end{aligned}$$

où la dernière somme ne fournit rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1, de sorte que p_1 passe les nombres 0 à $k-2$ au lieu de 1 à $k-1$, on trouve:

$$\begin{aligned}S_{\nu,\,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}&+\\+x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}&S_{\nu+2,\,2p_2+1}(x).\end{aligned}$$

En y substituant de nouveau pour $S_{\nu+2,2p_1+1}(x)$ l'expression, qui suit de (9) en y changeant ν en $\nu+2$, p_1 en p_3 et k en p_2, nous trouvons:

$$\begin{aligned}S_{\nu,\,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}&+\\+\frac{x^3}{2}I_{\nu+1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}(\nu+2)^{2p_2}&-\\-x^3\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}\sum_{p_3=0}^{p_2-1}\binom{2p_2}{2p_3+1}&S_{\nu+3,\,2p_3+1}(x),\end{aligned}$$

où de nouveau la dernière somme ne fournit rien pour $p_2=0$ et donc aussi rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1 et p_2 en p_2+1 on obtient:

$$\begin{aligned}S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu+1)^{2p_1}&+\\+\frac{x^3}{2}I_{\nu+1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}(\nu+2)^{2p_2}&-\\-x^3\sum_{p_1=0}^{k-3}\binom{2k}{2p_1+5}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4}{2p_2+3}\sum_{p_3=0}^{p_2}\binom{2p_2+2}{2p_3+1}&S_{\nu+3,2p_3+1}(x).\end{aligned}$$

En continuant ainsi la dernière somme devient ensuite:

$$\begin{aligned}(-1)^k x^k\sum_{p_1=0}^{0}\binom{2k}{2p_1+2k-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2k-2}{2p_2+2k-3}\cdots\sum_{p_k=0}^{p_{k-1}}\binom{2p_{k-1}+2}{2p_k+1}S_{\nu+k,2p_k+1}(x)&=\\=(-x)^k(2k)(2k-2)\dots 2\,S_{\nu+k,1}(x)=(-1)^k\,2^{k-1}\,k!\,x^{k+1}\,I_{\nu+k-1}(x)&.\end{aligned}$$

selon (1′) en y changeant ν en $\nu+k$.

Par conséquent on a la formule générale pour ν arbitraire et k entier $\geqq 0$:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^{2k+1} I_{\nu+2n}(x) = \\ = \frac{x}{2}\Bigg\{ \nu^{2k} I_{\nu-1}(x) &+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^r x^r I_{\nu+r-1}(x) \sum_{p_1=0}^{k-r} \binom{2k}{2p_1+2r-1} \sum_{p_2=0}^{p_1} \binom{2p_1+2r-2}{2p_2+2r-3} \cdots \\ &\cdots \sum_{p_r=0}^{p_{r-1}} \binom{2p_{r-1}+2}{2p_r+1} (\nu+r)^{2p_r} \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad I$$

Il est évident que la formule I représente la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2_n)^{2k+1} I_{\nu+2n}(x)$$

à l'aide des fonctions

$$I_{\nu-1}(x),\ I_{\nu}(x),\ \ldots\ I_{\nu+k-1}(x).$$

De I suivent (1) pour $k=0$, (3) pour $k=1$ et (10) pour $k=2$.

2. Nous avions substitué dans (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^{2k} I_{\nu+2n-1}(x) = \nu^{2k} I_{\nu-1}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n+2)^{2k} I_{\nu+2n+1}(x). \quad (6)$$

Quand nous y substituons:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^{2k} I_{\nu+2n+1}(x) = (\nu-2)^{2k} I_{\nu-1}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n-2)^{2k} I_{\nu+2n-1}(x) \ldots, \quad (6')$$

il vient:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k} \frac{x}{2} I_{\nu-1}(x) + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{(\nu+2n)^{2k} - (\nu+2n-2)^{2k}\} I_{\nu+2n-1}(x)$$

ou, d'après les réductions suivantes

$$\begin{aligned} (\nu+2n)^{2k} - (\nu+2n-2)^{2k} &= \{1+(\nu+2n-1)\}^{2k} - \{1-(\nu+2n-1)\}^{2k} = \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} (\nu+2n-1)^p \{1-(-1)^p\} = 2 \sum_{p=1,3,\ldots}^{2k-1} \binom{2k}{p} (\nu+2n-1)^p = \\ &= 2 \sum_{p_1=0}^{k-1} \binom{2k}{2p_1+1} (\nu+2n-1)^{2p_1+1}: \end{aligned}$$

$$S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k} \frac{x}{2} I_{\nu-1}(x) + x \sum_{p_1=0}^{k-1} \binom{2k}{2p_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n-1)^{2p_1+1} I_{\nu+2n-1}(x),$$

de sorte que nous obtenons en vertu de (4), en y changeant ν en $\nu-1$, la formule récurrente:

$$S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k} \frac{x}{2} I_{\nu-1}(x) + x \sum_{p_1=0}^{k-1} \binom{2k}{2p_1+1} S_{\nu-1,2p_1+1}(x), \quad . \quad (9')$$

qui nous permet également comme (9) de calculer successivement $S_{\nu,1}(x)$, $S_{\nu,3}(x)$, $S_{\nu,5}(x)$, etc.

En allant comme dans le paragraphe 1 on peut aussi déduire de (9′) une formule générale pour $S_{\nu,2k+1}(x)$. D'abord on trouve:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=(\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-3)^{2p_1}+$$
$$+x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu-2,2p_2+1}(x),$$

et ensuite:

$$\left.\begin{aligned}S_{\nu,2k+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)=\\=\frac{x}{2}\Big\{(\nu-2)^{2k}I_{\nu-1}(x)+\sum_{r=1}^{k}x^r I_{\nu-r-1}(x)\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k}{2p_1+2r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_2+2r-2}{2p_2+2r-3}\cdots\\\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+2}{2p_r+1}(\nu-r-2)^{2p_r}\Big\}\end{aligned}\right\}.\ II$$

La formule II représente la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)$$

à l'aide des fonctions

$$I_{\nu-1}(x),\ I_{\nu-2}(x),\ \ldots\ I_{\nu-k-1}(x).$$

3. Il est aussi possible de faire une combinaison des formules récurrentes (9) et (9′). En substituant dans (9) pour $S_{\nu+1,2p_1+1}(x)$ resp. dans (9′) pour $S_{\nu-1,2p_1+1}(x)$ l'expression, qui suit de (9′) resp. de (9) en y changeant ν en $\nu+1$ resp. $\nu-1$, p_1 en p_2 et k en p_1, nous trouvons les relations:

$$S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_{\nu}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1}-$$
$$-x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x),$$

resp.

$$S_{\nu,2k+1}(x)=(\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1}-$$
$$-x^2\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}\sum_{p_2=0}^{p_1-1}\binom{2p_1}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x),$$

dans lesquelles la dernière somme ne fournit rien pour $p_1=0$; en y changeant p_1 en p_1+1, nous obtenons les formules récurrentes:

$$\left.\begin{aligned}S_{\nu,2k+1}(x)=\nu^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-\frac{x^2}{2}I_{\nu}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1}-\\-x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x),\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+1}(x) = (\nu-2)^{2k}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x) + \frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k}{2p_1+1}(\nu-1)^{2p_1} - \\ -x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k}{2p_1+3}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2}{2p_2+1}S_{\nu,2p_2+1}(x). \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

De ces formules on peut déduire, comme dans le paragraphe 1, des formules générales pour $S_{\nu,2k+1}(x)$; cependant il est préférable de faire différence entre k pair et k impair. En changeant k en $2k$ resp. $2k+1$, nous trouvons respectivement:

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{\nu^{4k} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\nu^{2p_{2r}}\right\} - \\ & -\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad III\,a$$

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+3}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+3}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{\nu^{4k+2} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\nu^{2p_{2r}}\right\} - \\ & -\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad III\,b$$

$$\left.\begin{aligned} & S_{\nu,4k+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+1}I_{\nu+2n}(x) = \\ & = \frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{(\nu-2)^{4k} + \sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right. \\ & \qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}(\nu-2)^{2p_{2r}}\right\} + \\ & +\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots \\ & \qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}} \end{aligned}\right\} \quad IV\,a$$

$$\left.\begin{aligned}
&S_{\nu,4k+3}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{4k+3}I_{\nu+2n}(x)=\\
&=\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)\left\{(\nu-2)^{4k+2}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}(\nu-2)^{2p_{2r}}\right\}+\\
&+\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}(\nu-1)^{2p_{2r+1}}
\end{aligned}\right\}\ IVb$$

Il est évident que les formules III*a* et III*b* représentent la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+2n)^{2k+1}I_{\nu+2n}(x)$$

seulement à l'aide des fonctions $I_{\nu-1}(x)$ et $I_\nu(x)$, et les formules IV*a* et IV*b* seulement à l'aide des fonctions $I_{\nu-1}(x)$ et $I_{\nu-2}(x)$.

Remarque. Les formules précédentes sont déduites en appliquant seulement la propriété (2) des fonctions de BESSEL; alors il est évident que dans ces formules les fonctions de BESSEL peuvent être remplacées par toute fonction cylindrique qui satisfait à la même propriété.

4. A cause des cas particuliers:

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\qquad\text{et}\qquad I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

les formules III*a* et III*b* donnent pour $\nu=\frac{1}{2}$, de même les formules IV*a* et IV*b* pour $\nu=\frac{3}{2}$, les formules spéciales:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2n+\tfrac{1}{2}\right)^{4k+1}I_{2n+\frac{1}{2}}(x)=\\
&=\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left[\cos x\left\{\frac{1}{2^{4k}}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\right.\right.\\
&\qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\right\}-\\
&-x\sin x\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\left.\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\right]
\end{aligned}\right\}\ Va$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2n+\tfrac{1}{2}\right)^{4k+3}I_{2n+\frac{1}{2}}(x)=\\
&=\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\cos x\Bigg\{\frac{1}{2^{4k+2}}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\}-\\
&-x\sin x\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg]
\end{aligned}\right\}\ Vb$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2n+\tfrac{3}{2}\right)^{4k+1}I_{2n+\frac{3}{2}}(x)=\\
&=\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\sin x\Bigg\{\frac{1}{2^{4k}}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\}+\\
&+x\cos x\sum_{r=0}^{k-1}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r-1}\binom{4k}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg]
\end{aligned}\right\}\ VIa$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2n+\tfrac{3}{2}\right)^{4k+3}I_{2n+\frac{3}{2}}(x)=\\
&=\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Bigg[\sin x\Bigg\{\frac{1}{2^{4k+2}}+\sum_{r=1}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r+1}\binom{4k+2}{2p_1+4r-1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-2}{2p_2+4r-3}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r}+0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+2}{2p_{2r}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r}}}\Bigg\}+\\
&+x\cos x\sum_{r=0}^{k}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{2k-2r}\binom{4k+2}{2p_1+4r+1}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r}{2p_2+4r-1}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+2}{2p_{2r+1}+1}\frac{1}{2^{2p_{2r+1}}}\Bigg].
\end{aligned}\right\}\ VIb$$

Botany. — *The growth of waterplants in solutions of phytohormones and of other substances.* (From the Botanical Institute, Government University, Leyden.) By G. L. FUNKE. (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

I. *Alpha-naphtalene acetic acid in the basin of Victoria regia.*

In last year's report on experiments with waterplants (3 i) I considered the possibility of adding alpha-naphtalene acetic acid to the *Victoria* basin as a means of testing the growth potentialities of the species growing in it, of *Victoria regia* itself in the first place. During the summer of 1942 I had the opportunity of executing this experiment. The development of the different species in the basin had reached its height in the middle of August and can be briefly described as follows:

Victoria regia: the plant possessed 8 leaves, numbered 1—8 in order of decreasing stage of maturity; Nos. 1 and 2 were old and approaching their end, No. 8 was not yet fully unfolded; (Nos. 9—11 appeared during the experiment). There was one flower on the point of opening (No. 1), some buds (Nos. 2—3) and a number of maturing fruits; compare table 1.

Nymphaea capensis, N. Lotus, N. Obergaertner Graebner, N. jubilé lilacina: their development was luxuriant; a great number of leaves were joined in neatly fitting mosaics; each species had some flowers and flowerbuds; the longest petioles did not exceed 130 cm, the flowerstalks measured between 30 and 55 cm.

The hormone was added to the basin on August 17th. The measurements taken on this day must needs be accepted as control; esp. in the case of *Victoria* we may safely assume that without artificial interference the mature leaves would not have developed beyond what they show on this date. Observations of former years and those made in other botanical gardens will without doubt support this opinion.

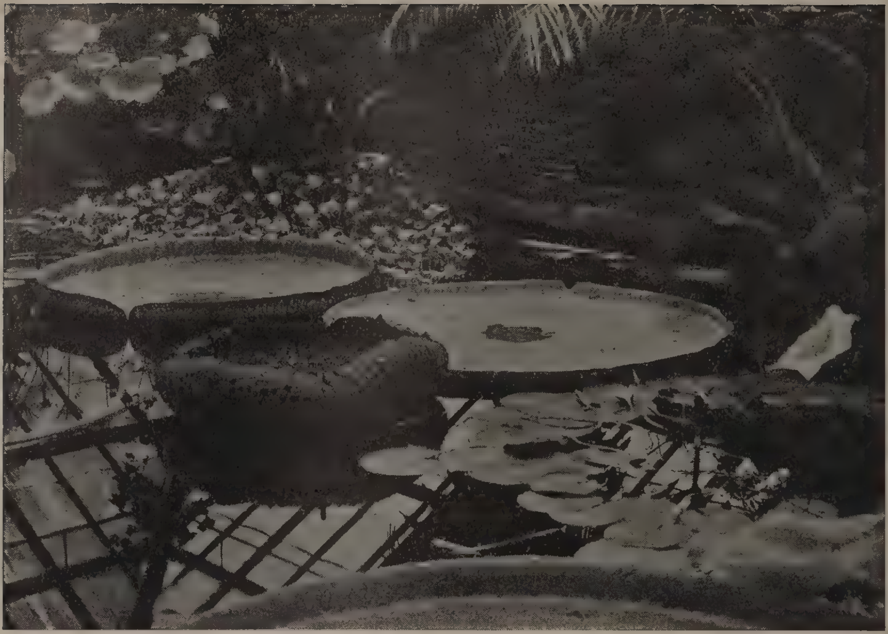
The petioles of the different species of *Nymphaea* can reach a greater length than those mentioned above (compare 3 i), when conditions are extremely favorable, but in this case too we are justified in taking for granted that a further spontaneous vigorous growth in the latter half of August is hardly to be expected.

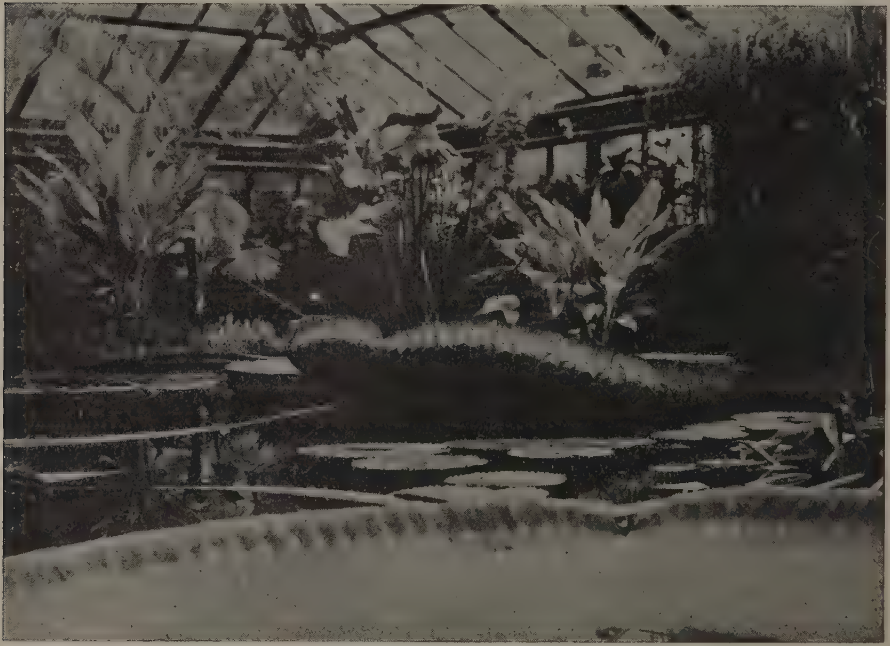
Therefore, any sudden change in the development of the plants after the addition of the hormone may be safely ascribed to the influence exerted by this substance.

The capacity of the *Victoria* basin is approximately 17.6 m^3. Last year we saw that a concentration of 0.25 mg/L of alpha-naphtalene acetic acid has the strongest influence thus far known on the growth of several species of waterplants. Therefore I added 4.4 gr of this auxin to the basin, giving due attention to a very thorough mixing. The temperature of the water was about 24° C throughout the experiment; this is not optimal, but quite sufficient for a ready response of the plants.

Reaction of *Victoria regia*: this species appeared to be extremely sensitive; 24 hours after the addition of the hormone its habitus was already abnormal, not so much because the petioles had elongated, but because they had bended towards the surface, with their upper halves emerged, thus being very conspicuous. The younger leafblades had grown hyponastically and consequently their upstanding borders were curved inwards and their horizontal parts were more or less lifted out of the water, showing the brilliant violet of the lower surface with the network of protruding veins; see figure 2. They further showed all sorts of irregular undulations, with in the centre a sunken part on which water gathered later on; the latter phenomenon occurred also in the older leaves; see figure 1.

Everyone of these peculiarities became more accentuated during the following days.





Victoria regia. Five days after the addition of 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid; 22 August 1942.

Fig. 1. Leaf No. 5, adult; left background;
leaf No. 1, old; right background;
leaf No. 8, young; foreground;
on the right: Nymphaea Lotus.

Fig. 2. Leaf No. 6, young; in the foreground part of leaf No. 2.

The photographs show some of the leaves 5 days after the addition of the hormone, viz the young ones Nos. 6 and 8, together with two older ones, Nos. 1 and 5, whose blades hardly responded to it. Table 1 gives an impression of the elongation of the petioles. A length of 290 cm may be considered as the extreme which can be reached in ordinary circumstances; the excess growth caused by the auxin, therefore, amounts to between 100 and 200 cm. The leafblades were pushed against the border of the basin, but the petioles, nevertheless, had not enough space to remain straight and formed large meanders, all the more conspicuous because they floated on the surface.

TABLE 1. Growth of Victoria regia in 0.25 mg/L α-naphtalene acetic acid.

Petioles in order of their age	August							September	
	17	18	20	22	25	28	31	10	16
1	290	290	340	355	370				
2	285	300	365	390	420	420	430		
3	260	262	340	350	410	415	425	435	
4	245	260	350	355	415	435	460	465	
5	205	230	310	345	390	400	420	430	
6	185	200	285	330	375	440	470	480	482
7	125	180	275	330	355	370	400	400	420
8	55	105	190	250	295	320	385	390	390
9		50	135	180	255	295	295	340	
10			50	90	152	260	340	380	380
11						60	125	300	
Flower stalks									
1	40	80	130	160	165	165	172	180	190
2		30	105	150	172	174	190	200	215
3			30	85	105	170	170	170	

The development of *Victoria* reaches its height during August, but new leaves and flowers are continually formed till the month of October and even November, though their dimensions become gradually smaller. The auxin shortened considerably this vegetation period; it practically came to a stop towards the end of September with everything characteristic of the approaching death: tiny flowerbuds and small leafblades which unfold only partially.

The phenomena which have been recorded here, parrallel those which have so often been observed in various species of *Nymphaea*: excessive and rapid elongation of the petioles, hyponastic curving of the blades, shortening of the vegetation period. As *Victoria* is a very large plant, these responses were especially striking, although they are really astonishing enough in the genus *Nymphaea* itself, and in some respects even more so. So far, however, there is nothing fundamentally new, but for the noteworthy fact that the concentration 0.25 mg/L is sufficient to produce these reactions so distinctly in the bulky organs of *Victoria*. I am even inclined to consider this dose as too high, witness the hyponasty of the leaves which in *Nymphaea* hardly ever occurs in the concentrations optimal for the growth, but regularly in the higher ones.

In former years I have stated that flowerstalks of *Nymphaea* do not elongate, neither as response to deepening of the waterlayer, nor to the addition of hormones. It was therefore a surprise to see how rapidly and easily the flowerstalks of *Victoria* reacted to the alpha-naphtalene acetic acid in this experiment. Table 1 gives an impression of the elongation of three of them; these were the youngest ones; those with ripening seeds stretched to between 130 and 150 cm; without interference they would not have surpassed ± 50 cm; therefore, their response to the auxin is relatively much stronger than that of the petioles. It will be understood that these long stalks were not rigid as normal ones, but that they floated on the surface of the water.

Reaction of *Nymphaea*: the four species growing in the *Victoria* basin responded much in the same way to the auxin and gave similar surprises. With a view to my former experiments I had expected that the petioles would elongate considerably; this was far from being the case. The longest ones, those whose blades are at the periphery of the leaf mosaics, practically did not grow at all; only the inner petioles stretched to lengths between 110 and 130 cm, that is to the same as the longest ones measured from the beginning, with the consequence that the mosaics "opened" to a broad circle; an example of this is to be seen on the right in figure 1.

The average length of the petioles, therefore, became much greater owing to the auxin, but the amazingly rapid growth which I observed in 1941 in a solution of the same concentration did not occur at all. This inconsistency of results may most probably be ascribed to the difference of age of my plant material. Last year I worked with young specimens, this summer with fully grown ones which either have lost their reaction capacity for the greater part or (and) are only sensitive to higher doses of the hormone.

Another surprise, this time a very positive one, was presented by the flowerstalks. Similar to those of *Victoria*, they responded to the addition of the auxin by an immediate renewal of growth and within a few days reached lengths of 100 to 125 cm, whereas the normal ones are about 50 cm and seldom as long as 60. These stalks were also too flaccid to keep themselves upright and floated on the surface of the water amidst the numerous petioles, but easily discernible by their greater thickness. One flower and one bud are visible in figure 1. Cell measurements and determinations of the dry weight gave the impression that in these organs the stretching is due to cell elongation only, and that cell division, which is so important in the petioles, hardly occurs here, if at all. I had not the opportunity, however, to measure a sufficient number of stalks and therefore cannot draw any definite conclusion. Flowerstalks which developed 10 days and more after the addition of the auxin showed the normal dimensions and remained erect; apparently at that time the alpha-naphtalene acetic acid had lost its efficacy.

It remains a remarkable fact that in young plants of *Nymhaea* the petioles, on one side, respond so much more strongly to the hormone, and the flowerstalks, at the other, hardly if at all, when compared with what we see in adult plants which are at the height of their development. The only means of elucidating this problem would be a series of experiments with *Nymphaea* and *Victoria* throughout their different stages of development and with several concentrations of auxin. My former researches demonstrated that the sensitiveness to hormones of the petioles of *Nymphaea* is feeble during the seedling stage and increases with age; the same apparently holds true for the flowerstalks, although for these organs other concentrations seem to be needed in order to show their ready response. When, however, the plants become too voluminous to be manipulated in aquaria or small basins, and the *Victoria* basin is the only place where their full expansion can be studied, there arise practical difficulties for the continuation of the experiment and hardly any botanical garden will be sufficiently equipped to overcome them.

Among the other species grown in the *Victoria* basin there is only one which showed a slight response to the alpha-naphtalene acetic acid, viz. *Eichhornia crassipes*; its flowerstalks reached lengths about twice that of the normal ones, viz. 50—60 cm in stead of 30—35 cm; they remained, nevertheless, upright above the water. The leaves of *Eichhornia* showed no reaction; neither did the floating stems of *Hippuris*, or any of the other species, such as papyrus and canna, which are rooted in the *Victoria* basin; this negative result is quite what one would expect, at least as far as the latter are concerned.

II. *The influence of alpha-naphtalene acetic acid on cut petioles of waterplants.*

In the course of my experiments with waterplants I have observed several times that when a petiole somehow becomes detached from the plant, it can continue its growth in a solution of auxin to a considerable degree. During last summer I began to study this phenomenon more methodically.

Young specimens of *Nymphaea coerulea* were grown in a shallow aquarium in a solution of 0.25 mg/L alpha-naphtalene acetic acid. Twelve leaves were cut from the plants at their bases one day before the beginning of the experiment and divided into two groups, 6 mature and 6 young ones; they were kept in separate basins in the same concentration of auxin. The growth is recorded in table 2 a. In table 2 b the same is done for 6 petioles of *Limnanthemum nymphaeoides*, which were treated in exactly the same way, with the exception that the concentration of the hormone was 2 mg/L (comp. 3 h).

The rather old petioles of *N. coerulea* elongated less than the other groups, which fact agrees with former results. Apart from that it may be said that on the whole the petioles do not diverge in their growth from those which remained on the plants. The longest specimens were always found on the plants, but as the individual growth of petioles can vary considerably, I cannot say whether this is accidental or not.

Both in *N. coerulea* and *Limnanthemum* the dry weights of the petioles per cm are the same in every lot. The celllengths were found to be a little shorter in the cut petioles than in the others; this is the opposite of what one might expect, because the former ones were in less favorable conditions; (comp. 3 b and 3 i).

TABLE 2. Length of petioles, on the plant and petioles separate.

	August							Control in H_2O
	3	4	5	6	7	8	10	10
A. Nymphaea coerulea: 0.25 mg/L α-naphtalene acetic acid.								
On the plant aver. of 12 pet.	34.6	37.0	45.5	48.8	59.2	? 1)	60.8	36.2
Longest petiole	48	48	54	71	91		91	
Cut pet. av. of 6 mature sp.	31.7	35.8	40.3	43.0	44.9	45.5	46.7	34.1
Longest petiole	41	44	47	50	53	54	56	
Cut pet. av. of 6 young sp.	31.7	37.8	46.0	52.8	58.7	61.2	63.0	35.8
Longest petiole	35	44	57	68	77	79	81	
B. Limnanthemum nymphaeoides: 2 mg/L α-naphtalene acetic acid.								
On the plant aver of 10 pet.	27.0	43.2	58.0	60.4	61.5	62.1		29.5
Longest petiole	33	54	70	79	86	89		
Cut. pet. av. of 6	27.3	37.8	49.7	54.6	57.0	58.5		30.7
Longest petiole	30	41	52	60	66	68		

1) Inextricable.

On the last day of the experiment most blades of the cut leaves had a more or less yellowish colour, whilst those on the plants were still a healthy green. This indication of the nearing end is not to be wondered at, but the experiment shows none the less that the response to alpha-naphtalene acetic acid is equally strong in the two examined species, whether the leaves remain attached to the plant or not. A small number of petioles of *Nymphaea hybrida* yielded identical results. Therefore it seems that during the process of rapid elongation no food or other substances are needed from the plant itself. When we consider that cell division is one of the ways by which the rapid growth is achieved, we are inclined to come to the conclusion that the petioles themselves must contain the reserve materials for the formation of new cells.

III. *The influence of different compounds on the growth of waterplants.*

My former experiments have proved that water intake, cell elongation and consequently dry matter per unit of petiole length, are by no means so closely connected as one might be inclined to expect. When plants are taken from their natural habitat and placed in aquariums, the dry weight of the petioles sinks within a few days to half or even less than what it was before. Therefore it may be assumed that respiration plays a part here, although my experiments with aërated and non-aërated water are far from giving conclusive data in this direction (3 d). Assimilation, thickening of the cell walls, storage of food and other life processes are likely to prove to be of influence here. Nevertheless, I thought it worth while to investigate whether stimulation of the respiration might make the plants more sensitive to growth hormones. As aëration yielded no results, I tried another method, viz. of adding amino acids to the water because these substances are known to have a marked influence on the catabolic processes (2,6).

I applied the amino acids alone and together with optimal concentrations of alpha-naphtalene acetic acid; basins with this hormone only and with pure water served as controls. It was my idea that the hormone should indicate whether the growth capacity of the petioles was as it should be, and further that in a solution which activates their growth so strongly they might be more sensitive to the amino acids, in case these failed to exert any action when applied alone. Among the compounds at my disposal I chose asparagin, cystin and tyrosin in doses of 1 and 10 mg/L. Test plants were *Nymphaea coerulea* and *Limnanthemum nymphaeoides.*

The influence of the amino acids on the longitudinal growth, celllength, dry weight, etc., appeared to be purely negative, no matter whether the petioles were stimulated by alpha-naphtalene acetic acid or not. The response to the auxin was as rapid as it was in all other experiments.

Thiamin (aneurin or vitamin B_1) was given to *Nymphaea alba, N. jubilé lilacina* and *Limnanthemum*, separately or simultaneously with alpha-naphtalene acetic acid or when this latter auxin had already exerted its influence during a number of days; the concentrations varied between 1/40 and 5 mg/L. I could never detect any action of this important phytohormone on the growth of waterplants.

With a view to the cell division which must take place during the rapid elongation of the petioles, esp. of those of *Limnanthemum*, in solutions of auxins, I wanted to know whether colchicine can interfere with this process and thus disturb the growth. Specimens of *Nymphaea coerulea* and *Limnanthemum*, therefore, were grown in a solution of this substance. The concentration used was 20 mg/L; this is much less than what is usually applied to plants (1,5), but it should be kept in mind that the action was to last during several days. Moreover, I had to choose this dose rather at random because, so far as I know, no experiments up to now have been made with colchicine on phanerogamic waterplants, and I think that in applying it on these organisms the concentration ought to be rather low, because the substance can exert its possible influence on the whole surface of the plants. For the reason mentioned above the colchicine was added to the water simultaneously with the auxin. It goes without saying that both substances were tested separately at the same time.

Neither alone, nor in combination with alpha-naphtalene acetic acid the colchicine showed any influence in my experiments. The response of the plants to the auxin was as usual. Therefore I applied the colchicine also in combination with supra optimal doses of the hormone, in which the waterplants react abnormally, esp. by a strong cell stretching. *Limnanthemum* was grown in a solution of 5 mg/L; last year I stated that this concentration may be considered as injurious on account of the exceptionally long cells which the plant forms in it. This summer my material came from another place and appeared not to be harmed by the strong dose; it grew perfectly well in it and its cells were of the same dimensions as in lower concentrations. This fact once more nicely demonstrates the capriciousness of waterplants and their reactions to different circumstances. An additional dose of colchicine, as was to be expected, had no effect whatever.

Half a milligram per liter of alpha-naphtalene acetic acid is slightly injurious to *Nymphaea* (3 i); when to this concentration colchicine was added the toxicity was strengthened, as was shown by the dimensions of the cells. These were considerably longer than in the petioles grown in the auxin alone, although these in their turn were already longer than in control specimens, owing to the supra optimal concentration. The result of the cell measurements are presented in table 3. This was thus far the only indication of an appreciable action exerted by colchicine in my experiments; abnormal cell divisions, polynuclear cells, etc. were never observed.

TABLE 3. Nymphaea coerulea; aver. length of petioles in cm and of their cells in micra; 4 petioles per group; cells measured at 5 places in each petiole.

	Control	α-napht. acet. acid 0.5 mg/L	α-napht. acet. acid 0.5 mg/L + colchicin 20 mg/L
Length of petioles	44	90	70
Length of epid. cells	115	140	193
Length of subep. cells	122	188	241

IV. *Summary.*

A full grown plant of *Victoria regia* was submitted to the influence of alpha-naphtalene acetic acid in a concentration of 0.25 mg/L; its response was rapid and strong and in many respects paralleled that of other waterplants observed in foregoing years: vigorous renewal of growth of the petioles, hyponasty of the leaves, shortening of the vegetation period.

The leaves of full grown *Nymphaea*'s responded only feebly to the same dose of the hormone, to which young specimens are so uncommonly sensitive.

The flowerstalks of both *Nymphaea* and *Victoria* elongated strongly owing to the addition of the hormone. While in young specimens hardly any reaction of these organs could be observed, this is another example of the diversity of reaction capacity of the plants at different stages of development.

Cut petioles respond exactly in the same way to the addition of alpha-naphtalene acetic acid as those which remain attached to the plant.

Asparagin, tyrosin, cystin, thiamin and colchicine did not show any influence on the growth of waterplants, whether applied separately or in combination with alpha-naphtalene acetic acid. In one case colchicine seemed to strengthen the injurious influence of a supra optimal dose of the auxin.

I want to express my heartfelt thanks to everyone who helped me to carry out these researches in the Botanical Institute of the University of Leyden.

I have great pleasure in thanking the Direction of the N.V. Amsterdamsche Chininefabriek, Amsterdam, who provided me with the alpha-naphtalene acetic acid.

Botanical Institute.

Leyden, October 1942.

LITERATURE.

1. DUSTIN, A. P., Rend. Inst. di Sanit. Pubbl., **3**, 767 (1941).

2. FITTING, H., (*a*) Jahrb. wiss. Bot., **64**, 281 (1924); (*b*) ibid., **67**, 427 (1927); (*c*) ibid., **70**, 1 (1929); (*d*) Z. f. B., **23**, 328 (1930); (*e*) Jahrb. wiss. Bot., **77**, 1 (1932); (*f*) ibid., **78**, 319 (1933); (*g*) ibid., **82**, 613 (1936).

3. FUNKE, G. L., (*a*) Nat. wet. Tijdschr., **16**, 47 (1934); (*b*) ibid., **16**, 245 (1935); (*c*) Journ. Physiol., **90** (1937); (*d*) Biol. Jaarb., **5**, 382 (1938); (*e*) ibid., **6**, 334 (1939); (*f*) ibid., **7**, 274 (1940); (*g*) Bull. Soc. d. Hist. Nat. Toulouse, **73** (1940); (*h*) Biol. Jaarb., **8**, 47 (1941); (*i*) Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 1121 and 1214 (1941).

4. FUNKE, G. L. and P. M. BARTELS, Biol. Jaarb., **4**, 316 (1937).

5. KRIJTHE, J. M. and S. J. WELLENSIEK, Bibl. Genet., **14**, 1 (1942).

6. SCHWABE, G., Prot., **16**, 397 (1932).

Botany. — *The Influence of the Ion Activity and the Ion Concentration in the Medium on the Absorption of Cations by Plants.* By A. C. SCHUFFELEN and R. LOOSJES. (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

1. The influence exercised by the medium on the plant's absorption of ions may be distinguished in two types. In addition to the direct influence, i.e. the complex of factors of the medium which determines in a stationary situation of the root periphery the absorption of ions, there is an indirect influence, in which also the factors, regulating the absorption of ions from the side of the plant, are changed by the medium as a result of the absorption of ions.

We have drawn up a working hypothesis which reflects the importance of the situation of the medium for the direct influence on the absorption of ions (1). This working hypothesis, in which the absorption of ions is considered a diffusion process, implies that the absorption of cations depends on the activity of the ion in the medium concerned ($(a_i)_{\text{medium}}$), on the concentration of hydrogen ions in the medium $(\text{pH})_{\text{medium}}$), on the total salt concentration of the medium ($(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$) and on the activity of the ions in the imaginary surface of the root.

In the following we would discuss a few experiments demonstrating qualitatively the correctness of the said working hypothesis.

2. First of all we would discuss the conditions to which the experiment has to come up in order to arrive at a decision. Our working hypothesis takes the processes conducted by life together in the "pump function" of the plant. To make this function a constant quantity during our experiments, the plant's vital functions must have one and the same course in all instances under consideration. We have to see, therefore, that there is complete equality for the whole series of experiments in the factors exercising influence on these physiological functions. These factors are temperature, light, oxygen and carbon dioxyde pressure of the medium, aeration etc. (2). By carrying out the experiments in a greenhouse we may assume that temperature and intensity of light are equal for all objects. During long continued experiments there do appear changes in the said factors, but these are equal for all objects. The oxygen pressure and the pressure of carbon dioxyde can be kept equal for the various objects by conducting a constant air current through the different media. This air current serves at the same time for stirring suspensions.

The second condition for such an experiment is the following. During the experiment the stationary situation, kept up by the vital functions, must not be subject to changes in the periphery of the root. The composition of the imaginary surface must, therefore, remain constant. Should this situation change during the treatment with a certain medium, an indirect influence of the medium would have come into existence, undesirable for the study of the direct influence of the medium on the absorption of cations. To comply with this condition it is necessary not to lengthen unduly the contact between plant root and medium. We hold the view that a stay of the roots in a certain medium for 8 to 10 hours does not change the stationary situation of the wall. For the present we cannot yet prove this exactly, as our data are still inadequate in this respect, but various indications point to this, so that we have sound reasons for our supposition. Experiments in this connection are in the course of execution.

The third condition is that the medium must not be subject to more than slight changes during the experiment, for only in that case the characteristic of the medium is one and the same during the whole experiment. In our experiments we adopt the arithmetical average of the situation at the beginning and at the end as the characteristic of the medium during the whole period of experimenting. It is not possible, especially as regards the pH, to keep this equal between the start and the end of the experiment. Particularly solutions without buffer power undergo changes owing to the excretion of carbon dioxyde by the plant root. This objection can be removed only by applying very rapidly running water cultures. For technical reasons this was, however, impracticable in our experiments with suspensions.

The fourth condition, demanded by the method of analysing, is a considerable difference in content of cations between the untreated plants and those of the experiment. It must be possible to determine this difference analytically with a certain degree of exactness.

For our experiments we grew plants (oats — variety Mansholt III) according to the method of HOAGLAND and BROYER (4), as also adopted by JENNY (3) and his collaborators. The principle of this working method is the growth of sound plants with a strong capacity to accumulate salts owing to a high content of glucose and a low content of salt in the root. The latter property is particularly important for the fourth condition to which the material has to come up. The high content of glucose renders a good respiration possible, assuring a constant character of the vital functions during a relatively long time. Also the third property guarantees a normal course of the physiological processes. For the method of growth we refer to the extensive communication by HOAGLAND and BROYER (4). In some instances the seeds were germinated in quartz sand. Later we replaced this by germination on a paraffined little mat above a surface of water, so as to avoid a damage to the root system on transferring the plants to the water cultures.

According to this working method each time seven plants are grown in a cork with seven holes. Each cork constitutes a unit which can be used for a certain experiment. Complete equal treatment during the period of plant growth makes the units (24 pieces, each with 7 plants) completely equal at the beginning of the experiment. For the absorption from different media of cations they were used when they were about three weeks old. From determinations of species of cations in foliage and roots (Na or K) in various unities which were analysed as blanks, we calculate for the mineral composition of a unit an average error of about 10%.

The units were placed in different solutions (or suspensions), in which the intake or outgo of a certain ion was followed. For this purpose the content of the respective ion in foliage and roots was determined spectrographically (by means of the flame method of LUNDEGåRDH (5)). Before transferring the roots from the liquid, in which they were grown, into the experimental solutions (suspensions), the roots were thoroughly washed in distilled water.

The quantities of the solutions (suspensions), used for the study of the absorption of cations, were 200 cm^3 and in some instances 500 cm^3. They were contained in beakers surrounded by black ondulated cardboard. The beakers were covered by a wooden lid with a hole in which the cork with the plants fitted. At the same time a capillary glass tube was conducted through the lid through which an air current was blown by a little forcing pump. After 8 to 10 hours (from 9 a.m. till 7 p.m.) the plants were removed from the beakers and the roots rinsed again in distilled water. For the suspensions it was necessary to rub the roots cautiously between the fingers during the rinsings.

After the latter rinsing the foliage and roots were separated and analysed individually. The experiments were thus carried out with entirely undamaged plants. We must bear in mind, however, that the results apply quantitatively to one situation (physiological condition), of the plant only so that the quantitative data have merely a limited value. Qualitatively the relations apply to a much larger area.

The experiments on the absorption of cations in different media may be separated in those with an approximately constant $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ (total salt concentration) and those in which all the three quantities under study varied.

3. The experiments with a constant $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ refer to a number of observations made in Na-H-SO$_4$-solutions, Na-H-bentonite-suspensions and Na-H-dusarit-suspensions. There was also made an investigation on the behaviour of the roots in a similar series of K-H-solutions (suspensions).

Na-H-series. A few data of the various media and analyses of the treated plants are stated in table 1. Moreover these and other results are shown graphically in fig. 1 and 2.

TABLE 1.

Sodium absorption from different media. Content of medium 200 cm³, $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ constant. Date of experiment 11th July 1941. Duration of experiment 8 hours.

No.	Description	Medium				Plant				
		mg eq Na per 200 cm³ (start)	mg eq H per 200 cm³ (start)	Average $a_{Na} \times 10^5$	Average pH	Root weight dry 105° C g	Foliage weight dry 105° C g	mg eq Na per 100 g root	mg eq Na per 100 g foliage	Gross intake mg eq Na per 100 g root
1	not treated	—	—	—	—	0.157	0.704	26.5	9.8	—
2	„	—	—	—	—	0.181	0.630	27.8	8.3	—
3	distilled water	—	—	—	—	0.235	0.937	28.9	13.9	—
4	„	—	—	—	—	0.199	0.914	25.9	11.5	—
5	Na-H-SO$_4$-solution	2.000	0.000	990	10.16	0.261	0.944	43.4	10.0	+16.3
6	„	1.500	0.000	736	8.61	0.261	1.001	48.7	16.1	+21.4
7	„	1.000	0.000	497	4.39	0.248	0.758	32.8	17.4	+ 5.5
8	„	0.500	0.500	255	2.71	0.156	0.833	14.9	13.2	−12.4
9	„	0.050	0.950	29	2.42	0.130	0.622	14.5	2.1	−12.8
10	„	0.005	0.995	7.5	2.42	0.159	0.817	14.6	6.5	−12.7
11	Na-H-bentonite suspension (0.5 %)	1.000	0.000	100	9.31	0.177	0.892	71.4	7.8	+44.1
12	„	0.500	0.500	69	7.88	0.314	0.849	32.5	8.8	+ 5.2
13	„	0.250	0.750	44	6.02	0.232	0.821	27.2	5.0	− 0.1
14	„	0.125	0.875	28	4.95	0.271	0.726	22.8	7.9	− 4.5
15	„	0.063	0.937	32	4.17	0.251	0.893	23.8	10.4	− 3.5
16	„	0.032	0.968	26	3.89	0.218	0.797	18.0	9.4	− 9.3
17	„	0.000	1.000	15	3.69	0.262	0.631	17.1	13.5	−10.2
18	Na-H-dusarit suspension (0.5 %)	2.000	0 000	120	6.56	0.245	0.912	35.9	9.3	+ 8.6
19	„	1.500	0.500	85	5.13	0.296	0.812	31.4	12.8	+ 4.1
20	„	1.000	1.000	48	3.57	0.273	0.835	8.7	6.8	−18.6
21	„	0.500	1.500	66	2.95	0.223	0.788	10.0	4.4	−17.3
22	„	0.250	1.750	59	2.88	0.127	0.772	13.2	8.9	−14.1
23	„	0.125	1.875	23	2.74	0.169	0.885	8.1	5.9	−19.2
24	„	0.000	2.000	13	2.63	0.196	0.709	13.4	7.5	−13.9

For the calculation of the last column the average content of Nos. 1, 2, 3 and 4 was taken.

A constant level of the total salt concentration of the ions in different media can be reached only by variation of the concentration of two cations species, if the concentration of the anions is kept equal. The result of this is a certain relation between the two cation concentrations. In our instance the H-ion and the Na-ion are no independent variables, but the concentration of the Na-ion determines that of the H-ion and vice versa. This makes interpretation of the figures somewhat difficult, for if there is relation between

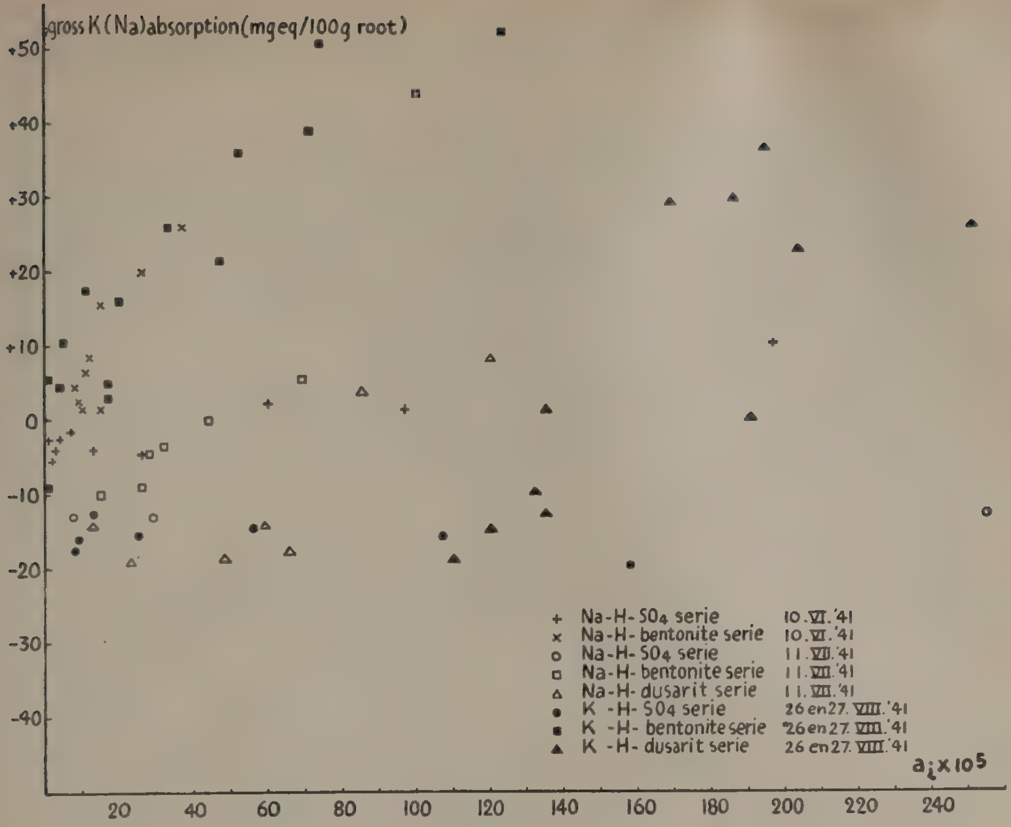

gross K (Na) absorption (mgeq/100g root)
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
-40
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
$a_i \times 10^5$
+ Na-H-SO4 serie 10.VI.'41
× Na-H-bentonite serie 10.VI.'41
○ Na-H-SO4 serie 11.VII.'41
□ Na-H-bentonite serie 11.VII.'41
△ Na-H-dusarit serie 11.VII.'41
● K-H-SO4 serie 26 en 27.VIII.'41
■ K-H-bentonite serie 26 en 27.VIII.'41
▲ K-H-dusarit serie 26 en 27.VIII.'41

Fig. 1.

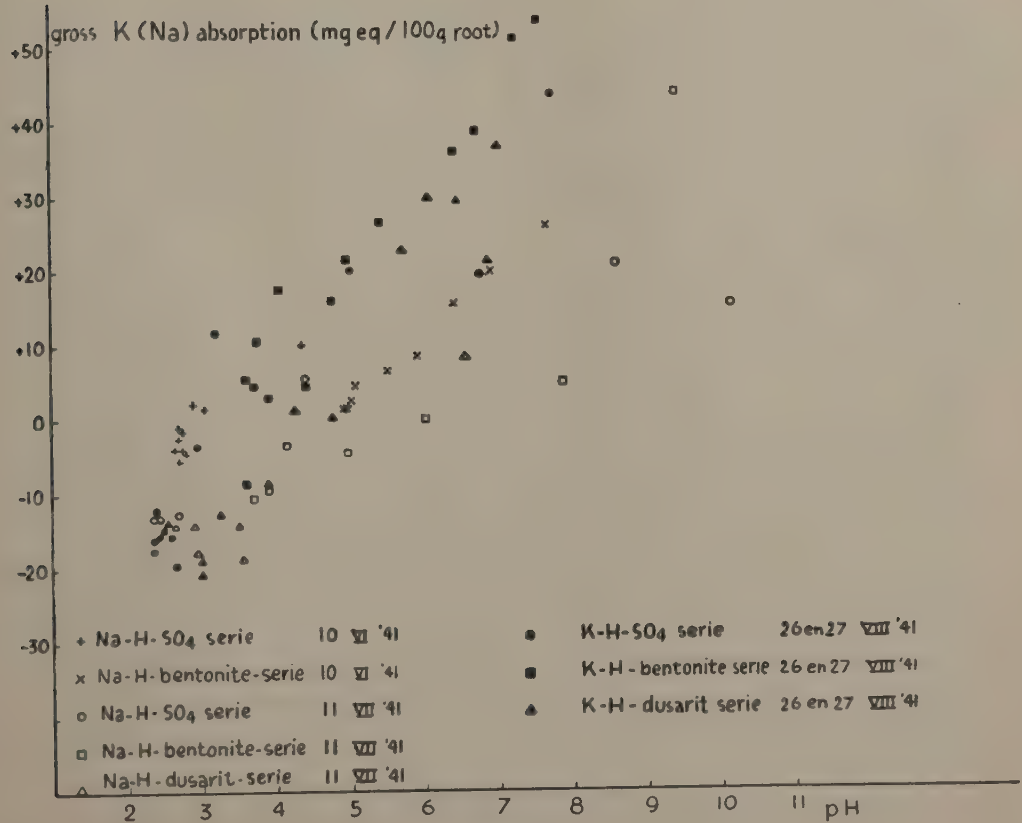

gross K (Na) absorption (mq eq / 100q root)
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
pH
+ Na-H-SO4 serie 10 VI '41
× Na-H-bentonite-serie 10 VI '41
○ Na-H-SO4 serie 11 VII '41
□ Na-H-bentonite-serie 11 VII '41
△ Na-H-dusarit-serie 11 VII '41
● K-H-SO4 serie 26 en 27 VIII '41
■ K-H-bentonite serie 26 en 27 VIII '41
▲ K-H-dusarit serie 26 en 27 VIII '41

Fig. 2.

$(a_{Na})_{medium}$ and the absorbed quantity of Na-ions, there is also relation between pH and the absorbed quantity.

Yet we can decide on a modest influence, as we took different anions (SO_4-bentonite-dusarit), to which the cations are bound in the medium, so that the relation H-Na is not the same in the different instances. Considering fig. 1 we find that at equal $(a_{Na})_{medium}$ different quantities of Na are absorbed in dependence on the pH. At a low pH less cations are accumulated than at a high pH. The SO_4 series, for instance, has at the same $(a_{Na})_{medium}$ a lower pH than the corresponding objects of the bentonite series (see table 1). The points, corresponding with the determinations in the bentonite series, lie, therefore, in graph 1 higher than those of the SO_4 series. This is in agreement with our working hypothesis saying that increase of the pH increases the potential difference between "surface" and medium or that the activity of the wall decreases in respect of that of the medium, causing a greater absorption.

TABLE 2.

Potassium absorption from different media. Content of medium 200 cm³, $(\Sigma c_i)_{medium}$ constant. Date of experiment 27th August 1941. Duration of experiment 8 hours.

No.	Description	Medium				Plant				
		mg eq K per 200 cm³ (start)	mg eq H per 200 cm³ (start)	Average $a_K \times 10^5$	Average pH	Root weight dry 105° C g	Foliage weight dry 105° C g	mg eq K per 100 g root	mg eq K per 100 g foliage	Gross intake mg eq K per 100 g root
25	not treated	—	—	—	—	0.184	0.355	31.0	78.1	—
26	,,	—	—	—	—	0.257	0.469	27.0	96.1	—
27	,,	—	—	—	—	0.209	0.372	28.3	83.9	—
28	K-H-SO_4-solution	1.700	0.000	825	7.55	0.289	0.436	96.8	100.5	+68.7
29	,,	1.200	0.000	589	6.77	0.228	0.443	47.7	105.2	+19.6
30	,,	0.800	0.200	394	3.20	0.216	0.569	40.0	80.9	+11.9
31	,,	0.300	0.700	158	2.67	0.164	0.518	8.5	80.8	−19.6
32	,,	0.100	0.900	56	2.52	0.179	0,567	13.7	73.8	−14.4
33	,,	0.020	0.980	13	2.41	0.095	0.333	15.8	74.0	−12.3
34	,,	0.004	0.996	8.3	2.38	0.145	0.489	10.7	67.5	−17.4
35	K-H-bentonite suspension (0.5 %)	0.870	0.130	74	7.26	0.243	0.481	81.5	90.0	+53.3
36	,,	0.540	0.460	52	6.40	0.216	0.517	63.9	82.0	+35.8
37	,,	0.270	0.730	47	4.95	0.145	0.293	49.6	86.7	+21.5
38	,,	0.160	0.840	17	4.41	0.165	0.423	33.0	75.1	+ 4.9
39	,,	0.087	0.913	17	3.92	0.200	0.463	31.0	78.6	+ 2.9
40	,,	0.033	0.967	4	3.71	0.216	0.545	32.8	87.2	+ 4.7
41	,,	0.000	1.000	1	3.62	0.152	0.392	19.7	75.2	− 8.4
42	K-H-dusarit suspension (0.5 %)	2.200	0.000	251	6.83	0.169	0.454	49.4	103.0	+21.3
43	,,	1.850	0.150	186	6.07	0.189	0.345	58.2	92.5	+30.1
44	,,	1.400	0.600	191	4.75	0.153	0.469	28.8	88.6	+ 0.7
45	,,	1.100	0.900	132	3.89	0.195	0.395	19.0	67.9	− 9.7
46	,,	0.650	1.350	135	3.25	0.116	0.424	15.5	74.1	−12.6
47	,,	0.300	1.700	110	2.97	0.163	0.446	9.5	61.9	−18.6
48	,,	0.000	2.000	—	2.52	0.131	0.561	13.7	70.5	−14.4

For the calculation of the last column the average content of Nos. 25, 26, 27 and Nos. 1, 2 and 3 was taken.

Fig. 2 shows that the points for various $(\mathrm{pH})_{\mathrm{medium}}$ are grouped round a line. We must bear in mind in this connection that the x-axis is logarithmic, so that slight differences have greater significance than in fig. 1. Comparison over about 2 pH units, corresponding to the whole x-axis of fig. 1, shows that also the spread enlarges in that event. The points indicating that objects with a higher activity of the Na-ions in the medium also lie here at the same pH above those representing a lower activity in the medium (see table 1).

Although there is thus a composite relation we may conclude that both increase of $a_i)_{\mathrm{medium}}$ and increase of the pH result in enlarged Na-absorption. This series of experiments confirms our working hypothesis qualitatively.

K-H-series. A few data on the first two K-H-series are shown in table 2, while these and other data were also included in graphs 1 and 2. They are equal to the Na-series already discussed and give a complete confirmation of the results obtained there. There is, therefore, no need to go further into these data, but we would observe only as regards

TABLE 3.

Potassium absorption from different media. (K-H-acetates). Content of medium 200 cm³. Date of experiment 2d October 1941. Duration of experiment 8 hours.

No.	Medium						Plant		
	mg eq K per 200 cm³ (start)	mg eq H per 200 cm³ (start)	mg eq CH_3COO per 200 cm³ (start)	Average $a_K \times 10^5$	Average pK	Average pH	Root weight dry 105° C g	mg eq K per 100 g root	Gross intake in mg eq K per 100 g root
11	0.600	0.000	6.000	282	2.55	6.17	0.167	104.2	+83.0
12	0.600	0.032	6.320	275	2.56	6.01	0.145	84.8	+62.6
13	0.600	0.320	9.320	275	2.56	5.78	0.148	51.4	+29.2
14	0.600	3.200	38.000	295	2.53	4.95	0.176	17.1	— 5.1
15	0.600	H_2SO_4 added	—	275	2.56	3.97	0.187	8.3	—13.9
16	0.600	,, ,,	—	275	2.56	3.15	0.172	46.2	+24.0
21	2.000	0.001	2.001	955	2.02	3.81	0.283	5.8	—16.5
22	2.000	0 011	2.011	891	2.05	3.80	0.259	5.2	—17.0
23	2.000	0.107	2.107	933	2.03	3.80	0.176	5.4	—16.8
24	2.000	1.070	3.070	933	2.03	3.63	0.205	5.6	—16.6
25	2.000	10.700	12.700	955	2.02	1.89	0.179	6.2	—16.0
26	2.000	H_2SO_4 added	—	912	2.04	1.85	0.214	4.4	—17.8
41	0.200	0.000	0.200	48	3.33	5.60	0.202	50.5	+28.3
42	0.200	0.001	0.201	32	3.50	5.48	0.239	44.6	+22.4
43	0.200	0.011	0.211	44	3.36	5.35	0.248	59.1	+36.9
44	0.200	0.107	0.307	81	3.09	5.04	0.210	33.6	+11.4
45	0.200	1.070	1.270	100	3.00	4.18	0.164	6.1	—15.1
46	0.200	10.700	10.900	98	3.01	3.30	0.132	10.6	—11.6
61	0.020	0.0000	0.0200	8.2	4.09	5.77	0.240	25.2	+ 3.0
62	0.020	0.0001	0.0201	9.5	4.02	5.72	0.271	22.9	+ 0.7
63	0.020	0.0011	0.0211	9.3	4.03	5.96	0.235	23.4	+ 1.2
64	0.020	0.0107	0.0307	5.8	4.24	5.63	0.282	24.8	+ 2.6
65	0 020	0.1070	0.1270	8.4	4.07	4.58	0.236	24.8	+ 2.6
66	0.020	1.0700	1.0900	16.3	3.79	3.92	0.163	6.7	—15.5

For the calculation of the last column the average content of Nos. 1, 2, 3 and 4 of table 4 was taken.

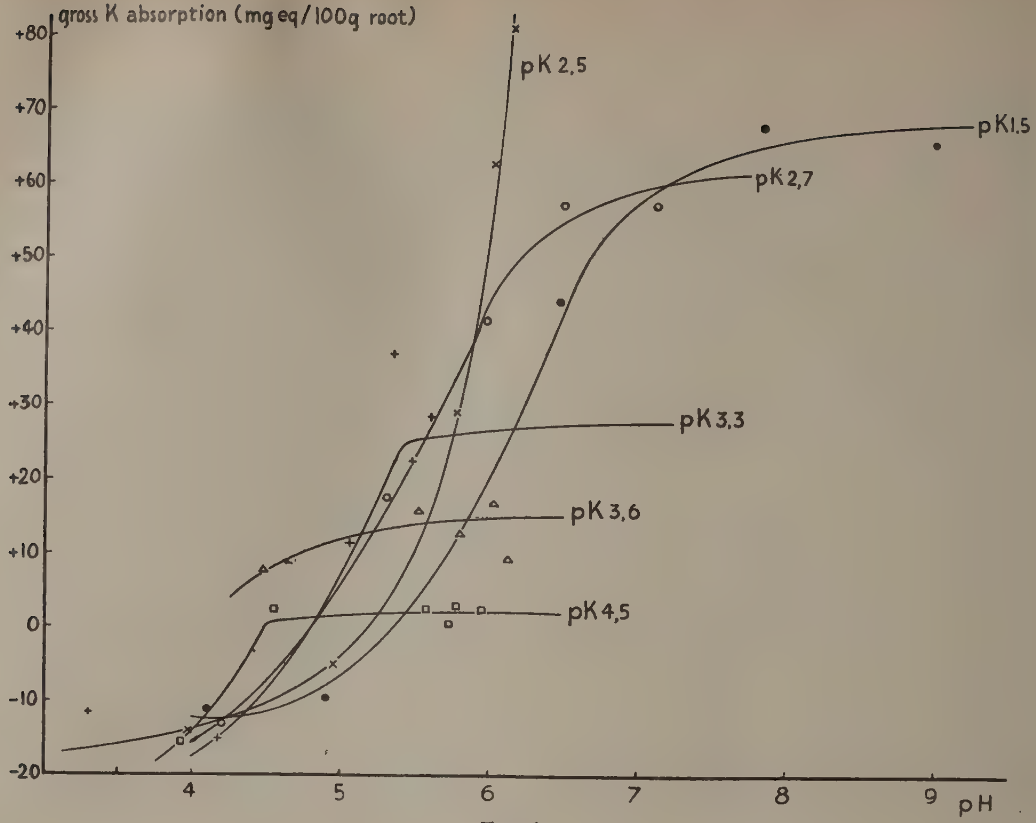

gross K absorption (mg eq/100g root)
+80
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
4
5
6
7
8
9
pH
pK 2,5
pK1,5
pK 2,7
pK 3,3
pK 3,6
pK 4,5

Fig 3.

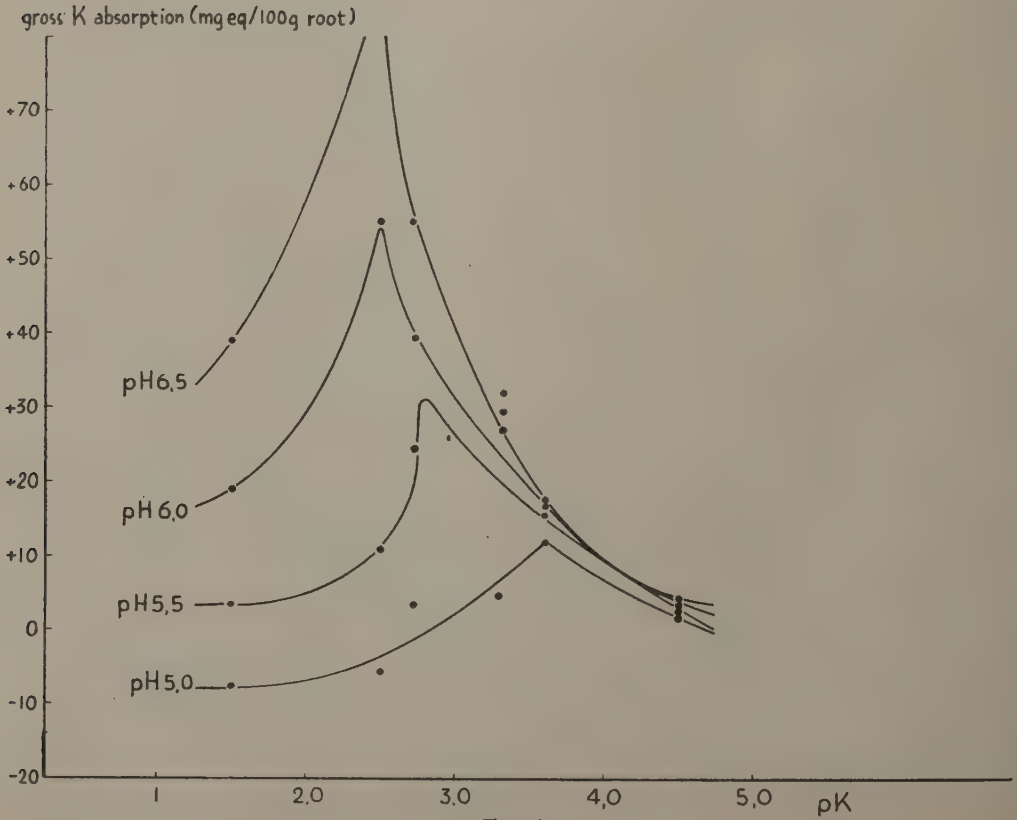

gross K absorption (mg eq/100g root)
+70
+60
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
1
2,0
3,0
4,0
5,0
pK
pH 6,5
pH 6,0
pH 5,5
pH 5,0

Fig. 4.

the potassium ions that in spite of the fact that the stationary situation was at a higher level than that of sodium, more potassium has been absorbed in the same $(a_K)_{\text{medium}}$ and $(\text{pH})_{\text{medium}}$ than in the case of sodium. This is either due to the fact that owing to physiological or physico-chemical influences of the plant the $(a_K)_{\text{,,surface''}}$ is lower than the $(a_{Na})_{\text{,,surface''}}$ in the same concentration of potassium and sodium ions at the surface, or to some other pump function.

Foliage analyses show that in the sodium series a more or less distinct sodium accumulation took place in the foliage, while this was much less pronounced in the potassium series. (In our preceding considerations both were neglected, as the accumulation in the foliage is rather irregular). We shall not go further into this point.

The above composite relation between pH and activity of the metal ions in the medium induced us to carry out a series of experiments, of which the objects consisted of series with changing $(a_i)_{\text{medium}}$ and constant pH and of series with changing pH and constant $(a_i)_{\text{medium}}$. To study extreme instances we could not make use of suspensions, because of the impossibility to adequately vary the $(a_i)_{\text{medium}}$ therein. We carried out these experiments, therefore, with K-H acetates. We elected acetate as an anion to make a

TABLE 4.

Potassium absorption from different media. (K-H-acetates). Content of medium 200 cm³. Date of experiment 3d October 1941. Duration of experiment 8 hours.

No.	Medium						Plant		
	mg eq K per 200 cm³ (start)	mg eq H per 200 cm³ (start)	mg eq CH_3COO per 200 cm³ (start)	Average $a_K \times 10^5$	Average pK	Average pH	Root weight dry 105° C g	mg eq K per 100 g root	Gross intake in mg eq K per 100 g root
31	0.600	0.000	0.600	200	2.70	7.13	0.244	84.0	+61.8
32	0.600	0.003	0.603	209	2.68	6.50	0.263	84.0	+61.8
33	0.600	0.032	0.632	282	2.55	5.98	0.235	63.9	+41.7
34	0.600	0.320	0.932	263	2.58	5.30	0.244	40.0	+17.8
35	0.600	3.200	3.800	228	2.54	4.20	0.201	9.0	—13.2
51	0.060	0.0000	0.0600	24.5	3.61	6.12	0.234	31.6	+ 9.4
52	0.060	0.0003	0.0603	21.2	3.68	6.03	0.210	39.0	+16.8
53	0.060	0.0032	0.0632	22.4	3.65	5.81	0.226	35.8	+13.6
54	0.060	0.0320	0.0920	19.9	3.70	5.56	0.254	38.2	+16.0
55	0.060	0.3200	0.3800	26.1	3.58	4.46	0.242	30.4	+ 8.2
71	0.0060	0.0000	0.0060	1.7	4.78	6.16	0.276	23.8	+ 1.6
72	0.0060	0.00003	0.00603	1.2	4.92	6.11	0.170	26.5	+ 4.3
73	0.0060	0.0003	0.0063	1.5	4.84	6.02	0.269	24.5	+ 2.3
74	0.0060	0.0032	0.0092	4.0	4.40	5.86	0.299	20.9	— 1.3
75	0.0060	0.0320	0.0980	4.0	4.40	5.47	0.225	20.4	— 1.8
81	6.000	0.000	6.000	2880	1.54	9.01	0.237	87.8	+65.6
82	6.000	0.032	6.032	2820	1.55	7.85	0.247	89.5	+67.3
83	6.000	0.320	6.932	2570	1.59	6.48	0.236	66.1	+43.9
84	6.000	3.200	9.200	2690	1.57	4.90	0.166	12.7	— 9.5
85	6.000	32.00	38.00	2750	1.56	4.11	0.152	11.2	—11.0
1	blanco	—	—	—	—	—	0.230	25.2	—
2	,,	—	—	—	—	—	0.240	22.5	—
3	,,	—	—	—	—	—	0.182	20.6	—
4	,,	—	—	—	—	—	0·212	20.5	—

For the calculation of the last column the average content of Nos. 1, 2, 3 and 4 was taken.

buffer solution, but in such a solution the concentration of the anion cannot be kept constant, for which reason the third variable of the medium (Σc_i) will also make its influence felt. The data on this series of experiments are incorporated in tables 3 and 4 and shown graphically in fig. 3 and 4.

Graph 3 makes it clear that the pH exercises great influence on the absorption of potassium ions at a constant pK[1]) of the medium. The lines, indicating this relation, go upwards in increasing pH.

The importance of the earlier mentioned three factors is finely demonstrated in fig. 4, drawn up from fig. 3. This shows on the *x*-axis the pK and on the *y*-axis the absorbed quantity of potassium, while, by interpolation, points with equal pH, connected by lines (pH 5,0, 5,5, 6,0 and 6,5 respectively), have been taken up in fig. 3. Of the curves arising from the connection of the points concerned, the one for pH 6,5 lies above that of pH 6, this in turn above that of pH 5,5 and the latter finally above that of pH 5. This implies, therefore, that the absorption of potassium depends over the whole pK range on the pH, although quantitatively the differences are on the whole not equal.

The right side of the graphic figure shows that in increasing pK (so decreasing a_K) the quantity of absorbed potassium decreases, as was to be expected on basis of the hypothesis. This does not apply, however, to the left side, for in the middle a maximum comes forward, after which at lower pH values the quantity of potassium absorbed by the plant decreases again. This decrease is a result of increase of $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ towards the left side of the graph. The increase of $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ causes a smaller difference in potential between wall and medium, owing to which the activity at the imaginary surface increases strongly in respect of the medium. At the same time disturbances will arise in the area of the high $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$, arresting the absorption still further. Fig. 4 is thus also quite in agreement with the working hypothesis drawn up.

Wageningen, Laboratory for Agricultural
Chemistry of the Agricultural College.
Eindhoven.

LITERATURE.

1. A. C. SCHUFFELEN and R. LOOSJES, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 726 (1942).
2. D. R. HOAGLAND and T. C. BROYER, Plant Physiol., **11**, 471 (1936).
   D. R. HOAGLAND, Am. J. Bot., **27**, 173 (1940).
   F. C. STEWARD, Protaplasma, **18**, 203 (1933).
3. H. JENNY and R. OVERSTREET, Soil Science, **47**, 257 (1939).
4. D. R. HOAGLAND and T. C. BROYER, Plant Physiol., **11**, 471 (1936).
5. H. LUNDEGåRDH, Die quantitatieve Spektralanalyse der Elemente, I, Jena (1928), II, Jena (1934).
   A. C. SCHUFFELEN, De quantitatieve analyse met vlamspectra en hare nauwkeurigheid, diss. Utrecht 1940.

---

[1]) $pK = -\log (a_K)$

Physiology. — *L'influence des substances oestrogènes sur l'ovaire de rates non-adultes, hypophysectomisées* Par J. H. GAARENSTROOM. (Laboratoire de Pharmacologie de l'Université de Leiden. Directeur: Prof. Dr. S. E. DE JONGH.) (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE.)

(Communicated at the meeting of October 31, 1942.)

WALSH et ses collaborateurs découvrirent, en 1934, que l'atrophie des canalicules testiculaires du rat hypophysectomisé peut être prévenue par injection d'hormone masculine. Ils signalèrent ainsi, pour la première fois, que des hormones sexuelles exercent directement sur les gonades une influence favorable; une action pareille avait été exclusivement attribuée jusqu'alors aux hormones gonadotropes de l'hypophyse. Des recherches plus récentes révélèrent que la testostérone (hormone masculine) a une signification importante ou peut tout au moins en avoir, quant au développement et au maintien du tissu spermiogénétique testiculaire (NELSON, GAARENSTROOM et DE JONGH, GAARENSTROOM, 1941 a).

Ces faits, mis en rapport avec l'analogie qui existe, sous bien des rapports, entre la régulation hormonale de la fonction testiculaire et celle de l'ovaire, permettent de supposer qu'une ou plusieurs hormones sexuelles peuvent, de même, influencer l'ovaire. L'ovaire produit de l'oestrone aussi bien que de la progestérone et, vraisemblablement aussi, de la testostérone. On ne saurait donc, a priori, déterminer laquelle de ces hormones est la mieux indiquée pour l'exercice éventuel d'une action telle que celle mentionnée ci-dessus. L'analyse de l'action de l'oestrone et de l'oestradiol sur l'ovaire a formé notre première étude, le présent article en communique les résultats.

On connaît déjà quelques-unes des actions qu'exercent sur l'ovaire les substances oestrogènes, faisant toutefois abstraction de leur influence via l'hypophyse. Selon quelques-uns, l'oestrone est importante, quant à la formation et à la fonction du corps jaune de gestation chez la rate (SELYE et ses collaborateurs; WOLFE; HOHLWEG; DAVID et ses collab.; et autres) et la lapine (WESTMAN et JACOBSOHN; ALLEN et HECKEL). Ceci concerne de même la lapine hypophysectomisée (WESTMAN; ROBSON), mais on ne l'a point observé chez la rate hypophysectomisée (GAARENSTROOM, 1941 b). Pour être complet il faut dire, que l'influence maintenante exercée sur le corps jaune de la rate est attribuée par d'autres à des influences hypophysaires (ASTWOOD; SIMPSON c.s. 1941 b). De plus, l'effet d'extraits gonadotropes hypophysaires sur le poids de l'ovaire peut être intensifié par l'injection simultanée d'oestrone (SELYE et COLLIP); nous reviendrons plus loin à ce sujet.

Tandis que nos recherches étaient en cours, il a paru trois articles (PENCHARZ; SIMPSON et ses collaborateurs 1941 a; WILLIAMS) sur l'influence des substances oestrogènes, du stilboestrol principalement, sur le développement folliculaire. Les circonstances créées par la guerre ne nous ont permis de lire l'original que des deux dernières publications. SIMPSON et ses collaborateurs ont trouvé, de même que PENCHARZ, une légère augmentation du poids de l'ovaire, par suite de la stimulation du développement folliculaire chez de jeunes rates hypophysectomisées; WILLIAMS mentionne seulement l'augmentation du poids de l'ovaire, sans description du mécanisme.

Méthode.

Nos expériences ont été faites exclusivement sur des rates hypophysectomisées et non-adultes. L'ovaire droit fut extirpé le jour avant le premier traitement, de sorte que l'effet de l'injection, visible dans l'ovaire gauche encore présent, put être comparé à l'état primaire. Le traitement commença généralement le jour après l'hypophysectomie et fut appliqué 2 fois par jour, ceci pendant 4 à 5 jours. Dans une expérience, le traitement eut lieu du 5ième au 9ième jour après l'hypophysectomie et, dans une autre, du 1er au 9ième jour. L'autopsie fut faite le jour après la dernière injection.

Le résultat fut jugé d'après l'influence exercée sur le poids de l'ovaire et d'après celle exercée sur son image histologique. Dans le but d'éviter, quant à ce dernier, un jugement trop subjectif, nous comptions, en certains cas, les follicules dont le diamètre atteignit 200 μ ou plus et mesurions leur diamètre.

La numération et le mesurage exacts exigeant trop de temps, nous procédions comme suit; nous déterminions tout d'abord que le plus grand diamètre de l'ovocyte dans les follicules de plus de 200 μ comportait ± 70—80 μ. Nous mesurions ensuite, dans les coupes de l'ovaire, laissant entre elles une espace de 80 μ, le diamètre de tous les follicules dépassant 200 μ, à condition toutefois que l'ovocyte y fut visible. Ceci nous permit de mesurer presque tous les follicules dont le diamètre dépassait 200 μ et de déterminer, à quelque chose près, le diamètre réel. Ainsi nous n'avons presque jamais compté en double. A bien considérer cette méthode, on voit nettement qu'elle donne un nombre légèrement trop bas de follicules (ne comptant pas toujours les plus petits) et qu'en réalité le diamètre est un peu plus grand car le diamètre exact n'est pas toujours pris. L'erreur commise n'est pas importante et se répartit sur les différents groupes, sinon proportionnellement tout au moins dans la même direction. C'est pour cela que nous n'avons apporté aucune correction au valeurs trouvées.

Les substances oestrogènes administrées étaient l'oestrone et le benzoate d'oestradiol. Nous avons fait usage de cette substance les animaux la supportant mieux que l'oestrone. Les expériences se partagent en deux séries; pour l'une d'elles, nous avons étudié seulement l'effet des substances oestrogènes (i.c. oestradiol) et, pour l'autre, celle des substances oestrogènes combinées avec l'hormone gonadotrope hypophysaire. L'hormone gonadotrope hypophysaire dont nous avons fait usage était l'ambinon, extrait purifié, préparé avec de l'hypophyse de porcs. De plus, un groupe de rates fut traité par une combinaison d'hormone gonadotrope hypophysaire et d'hormone gonadotrope d'urine de gestation; nous en expliquerons les raisons ci-dessous.

Résultats et discussion.

A. *Expériences à l'oestradiol seul.*

Il a été constaté que les injections d'oestradiol faites durant les 4 premiers jours, ayant suivi l'hypophysectomie avaient de l'influence sur le poids de l'ovaire (voir le tableau I).

TABLEAU I.

Nombre de rates	Poids (gr.) rate moyenne	Ovaire gauche			Traitement		Ovaire droit		
		Extirpé le	poids (mgr)		Période	Dose quotidienne	Extirpé le	poids (mgr)	
			Extrêmes	Moyenne				Extrêmes	Moyenne
10	55	0ième jour 2)	5.0—10.0	7.1	1er—5ième jour	1 mgr. de benzoate d'oestradiol	5ième jour	5.5—12.5	8.6
10	56	0ième jour	4.0—10.0	6.4	1er—5ième jour	0 . cc2 d'huile d'olive	5ième jour	2.0— 7.0	4.3
7	75	5ième jour	3.5— 5.0	4.2	5ième—9ième jour	1 mgr. de benzoate d'oestradiol	9ième jour	4.5— 6.5	5.3
8	79	5ième jour	3.5— 5.5	4.5	5ième—9ième jour	0 . cc2 d'huile d'olive	9ième jour	2.5— 5.0	3.7
4 1)	79	0ième jour	5.0— 9.5	7.2	1er—9ième jour	1 mgr. de benzoate d'oestradiol	9ième jour	4.5— 9.5	6.1
5	72	0ième jour	5.5— 9.0	6.8	1er—9ième jour	0 . cc2 d'huile d'olive	9ième jour	3.0— 5.0	3.6

---

1) Toutes ces rates sont mortes le 8ième ou 9ième jour.

2) Jour de l'hypophysectomie.

Le poids était un peu plus élevé après qu'avant le traitement, tandis que les animaux non traités présentaient une forte régression. Au sens relatif, la différence est assez grande, mais elle est peu importante au sens absolu, surtout si l'on compare l'effet des substances gonadotropes sur le poids de l'ovaire. Lorsque l'animal fut traité plus longuement, pendant 9 jours par exemple, l'effet de l'oestradiol sembla ne pas s'intensifier mais plutôt diminuer; toutefois, les données à cet égard ne sont pas complètement dignes de confiance, parce que tous les animaux étaient morts à la fin de l'expérience. Ensuite, l'oestradiol appliqué du 5ième au 9ième jour, eut, sur le poids de l'ovaire, une influence moindre que celui du même hormone, injecté du 1er au 5ième jour.

L'examen histologique a donné une image beaucoup plus claire de l'influence de l'oestradiol sur l'ovaire. Il s'est révélé que, contrairement à ce qui est habituellement le cas après l'hypophysectomie, le nombre des grands follicules ne diminua pas, mais augmenta. Les numérations et les mesurages du diamètre des follicules dépassant 200 μ sont mentionnés au tableau II. On y voit que le nombre des follicules dont le diamètre dépasse 200 μ que contient l'ovaire droit (extirpé le jour même de l'hypophysectomie) comporta, en moyenne, 58 et que, après 4 jours de traitement, ce nombre, malgré l'absence de l'hypophyse, augmenta jusqu'à une moyenne de 97 (dans l'ovaire gauche). Les chiffres concordants groupe témoin sont, resp., 52 et 25. La seconde moitié du tableau contient les chiffres provenant de l'expérience dans laquelle l'oestradiol fut administré du 5ieme au 9ième jour et non du 1er au 5ième. Avant le traitement (5 jours après l'hypophysectomie), l'ovaire contenait, dans ce groupe, une moyenne de 11 follicules et, après le traitement, de 33; chez les animaux-témoins, ces chiffres comportaient resp. 18 et 10.

Le fait suivant est à remarquer. Le nombre des follicules était toujours en proportion inverse du diamètre dans les ovaires des rates *non traitées* par l'oestradiol, que les ovaires aient été extirpés au moment de l'hypophysectomie ou 5 à 9 jours plus tard. Par contre, dans les ovaires des animaux traités, le nombre des follicules ayant un diamétre de 250—300 μ et 300—350 μ a toujours été supérieur à celui de ceux dont le diamètre était de 200—250 μ.

Nous n'avons pas fait de numérations dans les ovaires des rates traitées du 1er au 9ième jour, parce qu'en rapport avec la mort de ces animaux, les préparations histologiques étaient impropres à cet effet.

Ces données montrent clairement qu'il s'est produit, sous l'influence de l'oestradiol, une certaine croissance de follicules. Cette croissance concerne seulement les follicules plus petits, qui augmentent de volume jusqu'à ce que leur diamètre ait atteint 250—400 μ. Le nombre des follicules dont le diamètre dépasse 400 μ n'augmente pas. Quand un follicule atteint une grosseur déterminée, son développement s'arrête; le follicule cesse de se maintenir comme tel et est la proie d'une atrésie. Ceci résulte de ce que l'effet du traitement n'augmente pas après 9 jours, mais qu'il est bien moindre qu'après 4 jours. Il est vrai que nous n'avons pas fait de numération lors de l'expérience de 9 jours et que les observations ont été faites sur des animaux morts, mais l'examen histologique laisse, malgré ceci, peu de doutes à ce sujet.

De plus il est remarquable, que des follicules normaux, dont le diamètre dépasse 300 μ, présentent déjà, en général, une cavité bien nette; ceci toutefois s'est révélé beaucoup moins marqué après le traitement par l'oestradiol. On peut en conclure peut-être que, sous l'influence de l'oestradiol, le follicule croît en effet, mais n'atteint pas son degré de maturité qu'il devrait atteindre autrement (la formation d'une cavité considéré comme symptôme de maturation). On devrait considérer la croissance et la maturation des follicules comme deux procès différents, opinion qui, peut-être, pourrait servir aussi quant à l'explication d'autres problèmes se rapportant au développement du follicule. Finalement, il nous faut mentionner encore que la thèque folliculaire n'a pas été influencée par l'oestradiol; elle a conservé l'aspect atrophique que l'on constate habituellement chez les rates hypophysectomisées.

Le fait que le nombre des follicules est plus grand si le traitement a été fait du 1er au

TABLEAU II. Nombre des follicules dépassant 200 μ dans l'ovaire.

Numéro de la rate	0ième jour 1)						5ième jour						9ième jour						Traitement
	200—240 μ	250—290 μ	300—340 μ	350—390 μ	>400 μ	total	200—240 μ	250—290 μ	300—340 μ	350—390 μ	>400 μ	total	200—240 μ	250—290 μ	300—340 μ	350—390 μ	>400 μ	total	
933	4	12	14	11	3	44	14	17	20	14	1	66							1er — 5ième jour par l'oestradiol
934	16	12	9	8	6	51	16	19	22	10	2	69							
931	22	25	22	5	1	75	15	36	26	5		82							
977	23	11	12	6		52	11	31	29	18		89							
979	26	21	10	8	4	69	38	64	56	17	2	177							
moyenne	18	16	13	8	3	58	19	33	31	13	1	97							
935	9	14	12	8	2	45	14	4				18							1er — 5ième jour par de l'huile d'olive
982	26	23	16	5		70	12	4				16							
932	21	23	15	3		62	24	21	13	3		61							
426	13	9	8	11	7	48	5	2				7							
715	12	7	9	6		34	13	12				25							
moyenne	16	15	12	7	2	52	14	9	3	1		25							
1157							7	2				9	6	14	17	1		38	5ième — 9ième jour par l'oestradiol
1158							2	1	1			4	5	6	9	2		22	
1169							6	6	2			14	7	5	8	6		26	
1173							4	6	5	2	1	18	7	9	15	13	11	55	
1180							2	4	2	1		9	4	4	7	7		22	
						moyenne	4	4	2	1	0	11	6	8	11	6	3	33	
1160							12	2				14	6					6	5ième — 9ième jour par de l'huile d'olive
1175							9	4				13	3					3	
1177							5	11	5	3		24	7	10				17	
1178							9	8	5			22	10	6	3			19	
1179							6	6	6	2		20	5					5	
							6	7				13	1	2				3	
						moyenne	8	6	3	1		18	6	3	1			10	

---

1) Jour de l'hypophysectomie.

5ième jour et non du 5ième au 9ième, est vraisemblablement explicable de la façon suivante: on trouve, dans un ovaire normal comparé à celui de l'animal hypophysectomisé depuis 5 jours, beaucoup plus de follicules, lesquels, bien qu'ils soient au-dessous de 200 μ, ont pourtant déjà subi une certaine croissance. Sous l'excitation de l'oestradiol, ces derniers atteignent plus facilement un diamètre de 200 μ ou plus, que si leur point de départ avait été un follicule point développé. De plus, il est possible que la petite quantité d'hormone gonadotrope qui circule encore peu de temps après l'hypophysectomie, appuie l'effet de l'oestradiol; ceci peut également contribuer à rendre plus compréhensible que l'effet est moindre lorsque nous commençons le traitement quelques jours après l'hypophysectomie.

B. *Expériences faites avec la combinaison d'hormone gonadotrope hypophysaire et de substances oestrogènes.*

Le traitement effectué par 5 U(nités) R(ats) d'ambinon (hormone gonadotrope hypophysaire) par jour a provoqué une stimulation de l'ovaire s'exprimant par une légère augmentation du poids de l'ovaire (de 8 mgr 1 à 14 mgr 5, voir le tableau III) et par des altérations de l'image histologique. En général, nous avons trouvé beaucoup de grands follicules à cavité et un nombre évoluant du petit au moyen, de corps jaunes dont la diamètre était assez petit.

TABLEAU III.

Nombre de rates	Poids (gr) rate moyenne	Poids (mgr) ovaire gauche		Traitement		Poids (mgr) ovaire droit	
		Extrêmes	Moyenne	Période	Dose quotidienne	Extrêmes	Moyenne
12	69	6.0—10.0	8.1	1er — 6ième jour	5 U.R. d'ambinon 1)	10.0—25.5	14.5
14	67	5.5—10.0	8.3	1er — 6ième jour	5 U.R. d'ambinon + 200 γ d'oestrone	15.0—47.0	24.1
5	69	7.0—10.0	8.4	1er — 6ième jour	5 U.R. d'ambinon + 1 mgr de benzoate d'oestradiol	15.0—24.0	21.2
6	72	7.0— 9.5	8.1	1er — 6ième jour	5 U.R. d'ambinon + 5 U.I. de pregnyl 2)	30.0—51.0	42.5
2	55	6.0— 9.0	7.5	1er — 5ième jour	1 U.R. d'ambinon	10.0—10.0	10.0
2	58	7.5— 8.5	8.0	1er — 5ième jour	1 U.R. d'ambinon + 200 γ d'oestrone	10.0—10.0	10.0
4	64	6.5— 7.5	7.1	1er — 5ième jour	1 U.R. d'ambinon + 1 mgr de benzoate d'oestradiol	9.0—18.0	12.8
3	54	7.0—10.0	8.8	1er — 5ième jour	1 U.R. d'ambinon + 5 U.I. de pregnyl	39.0—42.0	40.7
4	61	6.0—10.0	8.5	1er — 5ième jour	0.5 U.R. d'ambinon	6.5— 8.0	7.1
5	62	7.0—10.0	8.1	1er — 5ième jour	0.5 U.R. d'ambinon + 200 γ d'oestrone	7.0—10.0	8.8
3	63	7.0—10.0	8.7	1er — 5ième jour	0.5 U.R. d'ambinon + 5 U.I. de pregnyl	11.5—19.0	14.2

---

1) Ambinon = hormone gonadotrope hypophysaire.

2) Pregnyl = hormone gonadotrope d'urine de gestation.

Les deux substances ont été mises à notre disposition par la N.V. Organon.

Si, outre les 5 U d'ambinon par jour, l'animal reçoit encore 200 γ d'oestrone, le poids de l'ovaire augmente bien plus, notamment de 8 mgr 3 à 24 mgr 1. L'augmentation n'a pas été plus considérable lorsque nous donnions, au lieu de 200 γ d'oestrone, 1 mgr d'oestradiol. Malgré cette différence, nous n'avons pu déterminer à quelle base histologique attribuer la supériorité du poids de l'ovaire des rates traitées par la combinaison, à l'égard de celui des animaux traités par l'ambinon seulement. Nous avons trouvé des corps jaunes après l'administration de 5 U d'ambinon seul tout aussi bien qu'après celle de la combinaison; leur nombre et, aussi, leur diamètre étaient peut-être plus grand dans le dernier cas que dans le premier, mais nous n'avons pas pu en acquérir la certitude et, cela, surtout par suite de leur grand éparpillement. Il est possible que les expériences de SELYE et COLLIP donnent une indication de ce que la cause de la différence se trouve dans les corps jaunes. Ces auteurs ont traité un groupe de rates adultes hypophysectomisées, chaque jour, 10 jours durant, par un extrait gonadotrope hypophysaire et un second groupe par la même quantité d'extrait, combiné avec 200 γ d'oestrone. Les poids moyens de l'ovaire comportaient respectivement, à la fin de l'expérience, 41 et 91 mgr. Les auteurs ne disent point sur quelle base histologique repose cette différence, mais pareil écart ne peut qu'être en rapport qu'avec les corps jaunes, soit que leur nombre, soit que leur volume (ou les deux) aient été plus grands dans le dernier cas. Le fait qu'il s'agit ici des rates adultes, possédant déjà par conséquent des corps jaunes, ne permet pas de comparer complètement avec nos résultats et il nous faut donc laisser en suspens la question causale des différences de poids que nous avons trouvées.

Indépendamment du fait que l'augmentation de l'effet de l'ambinon par des substances oestrogènes soit en rapport avec les follicules ou avec les corps jaunes, il est possible, à notre avis, que l'influence des substances oestrogènes sur la croissance folliculaire, décrite ci-dessus, en forme la base. Il est très compréhensible qu'une augmentation de la stimulation de la croissance folliculaire facilite la lutéinisation.

Les expériences, mentionnées de même au tableau III et dans lesquelles de petites doses d'ambinon (½—1 U.R.) ont été administrées ou non avec des substances oestrogènes, ont donné peu d'aperçus nouveaux, nous ne les avons donc pratiquées que sur une petite échelle. Ces quantités d'ambinon ont modérément stimulé la croissance folliculaire. Quand il y a eu administration simultanée de substances oestrogènes, le poids de l'ovaire n'a pas augmenté sensiblement; malgré cela, le nombre des follicules de moyenne grandeur était considérablement plus élevé. Etant donné ce qui précède, ceci ne saurait nous étonner. Nous avons trouvé quelques corps jaunes chez l'une des rates, après l'administration d'1 U.R. d'ambinon + 1 mgr d'oestradiol.

Nous avons déjà fait remarquer que, tout au moins en ce qui concerne l'appui donné à l'effet de l'ambinon, l'activité de'1 mgr d'oestradiol n'a pas été plus intense que celui de 200 γ d'oestrone; l'influence de la dose citée en dernier lieu est donc évidemment maximale. Il s'ensuit peut-être que les effets obtenus sur l'ovaire par des quantités de substances oestrogènes beaucoup plus petites que celles dont nous avons fait usage, peuvent déjà se réaliser.

L'intensification de l'effet de l'ambinon par les substances oestrogènes fait penser à une autre substance: l'hormone gonadotrope d'urine de gestation, parce que ceci, en effet, intensifie de même l'action de l'ambinon. Il est possible que ce dernier synergisme soit l'oeuvre de l'oestrone qui surgit en abondance lors de la présence simultanée des deux hormones gonadotropes. C'est pour cela que nous avons comparé l'action synergétique de l'oestrone avec celle de l'hormone gonadotrope d'urine de gestation (tableau III). Sous ce rapport, l'action de cette dernière est beaucoup plus forte, on serait donc tenté de considérer que notre hypothèse est inexacte. Pourtant, à notre avis, il reste possible que l'intensification doit être attribué à l'oestrone, si l'on admet que cette substance, lorsqu'elle naît dans l'ovaire même, se trouve en une situation particulièrement favorable pour exercer sur le follicule, une influence locale, laquelle ne peut-être égalée, quantitativement, par l'administration d'oestrone via la circulation du sang. Ceci toutefois ne signifie aucunement que nous jugeons impossible l'existence d'une influence exercée sur le développement folliculaire ou formation de corps jaune par l'hormone gonadotrope d'urine de gestation, par une autre voie que celle de la formation d'oestrone.

Résumé.

L'administration de substances oestrogènes à des rates hypophysectomisées non-adultes, provoque une croissance de petits follicules. Cette croissance est restreinte, les follicules n'atteignent qu'une grandeur de 250—400 μ; ils ne se transforment jamais en corps jaunes et la formation de la cavité semble retardée.

Quand on administre simultanément des substances oestrogènes et de l'hormone gonadotrope hypophysaire, le poids de l'ovaire augmente davantage qu'après l'administration unique de cettte dernière.

Bien qu'elle soit en apparence de même nature, cette influence synergétique de l'oestrone est plus faible que l'action concordante de l'hormone gonadotrope d'urine de gestation que l'on connaît généralement.

LITTERATURE.

ALLEN, W. M. et G. P. HECKEL, Science **84**, 161 (1936).
ASTWOOD, E. B., Endocrinology **28**, 309 (1941).
DAVID, K. G., J. FREUD et I. E. UYLDERT, Arch. intern. Pharmacod. et Thér. **65**, 312 (1940).
GAARENSTROOM, J. H., Arch. intern. Pharmacod. et Thér. **66**, 121 (1941*a*).
————, Acta brev. Neerl. **11**, 147 (1941*b*).
———— et S. E. DE JONGH, Arch. intern. Pharmacod. et Thér. **65**, 206 (1941).
HOHLWEG, W., Klin. Wschr. **13**, 92 (1934).
MERCKEL, C., et W. O. NELSON, Anat. Rec. **76**, 391 (1940).
NELSON, W. O., Cold Spring Harbor Symp. on Quant. Biol. **5**, 123 (1937).
PENCHARZ, R. I., Science **91**, 554 (1940).
ROBSON, J. M., Journ. Physiol. **90**, 435 (1937); Quart. Journ. exper. Physiol. **28**, 49 (1938).
SELYE, H., et J. B. COLLIP, Endocrinology **20**, 667 (1936).
————, J. B. COLLIP et D. L. THOMSON, Proc. Soc. exper. Biol. a. Med. **32**, 1377 (1934—1935).
SIMPSON, M. E., H. M. EVANS, H. L. FRAENKEL-CONRAT et CHOH HAO LI, Endocrinology **28**, 37 (1941*a*).
————, W. R. LYONS et K. TURPEINEN, Endocrinology **28**, 933 (1941*b*).
WALSH, E. L., W. K. CUYLER et D. R. MC. CULLAGH, Am. J. Physiol. **107**, 508 (1934).
WESTMAN, A., Endocrinology **26**, 774 (1940).
———— et D. JACOBSOHN, Acta obstet. gynecol. Scand. **17**, 476 (1937).
WILLIAMS, P. C., Nature **145**, 388 (1940).
WOLFE, J. M., Proc. Soc. exper. Biol. a. Med. **32**, 757 (1935).

P. 1459/1.

Verantwoordelijk voor den geheelen inhoud: M. W. WOERDEMAN te Amsterdam.
Uitgever: N.V. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij, N.Z. Voorburgwal 68—70, Amsterdam. Drukker: Drukkerij Holland N.V., N.Z. Voorburgwal 68—70, Amsterdam.